El principio Gauge clásico, la geometría no conmutativa y el espacio-tiempo cuántico

Classic Gauge principle, not commutative geometry, and quantum time

Pedro S. González Cueva[1], *Javier A. Manrique Catalán*[2]

Dios dio al hombre la Ciencia,
para que comprendiera su obra,
más no para que la profanara.

RESUMEN

En este artículo de naturaleza propedéutica, se establece el Principio Gauge (de calibración, o de compensación). Un principio de equivalencia, elaborado a partir del histórico artículo de Yang-Mills, en 1954, sobre la Teoría Electromagnética No-Abeliana. Este principio, con el de equivalencia de Feynman: *campo-partícula*, conduce al origen geométrico de las 4 fuerzas fundamentales de la naturaleza, y a un intento de unificarlas. La aparición de la Teoría de Cuerdas (Green, Schwarz, Witten) y la Geometría No Nonmutativa (A. Connes) sugieren los primeros modelos matemáticamente consistentes sobre la Estructura Cuántica del Espacio-Tiempo.

Palabras clave: Gauge o calibración, simetría, noether invariante, electromagnetismo, gravitación, no-conmutación, supersimetría, supergravedad, cuerdas, supercuerdas, branas.

1 Profesor Principal de la Facultad de Derecho de la Universidad Privada Antenor Orrego. Profesor Emérito de la Universidad Nacional de Trujillo.

I. INTRODUCCIÓN

En el largo camino de la física, cada respuesta ha dado lugar a una nueva pregunta. Sin embargo, es importante destacar los modos de pensar que los hombres de ciencia han adquirido, y las actitudes que ha aprendido para dar respuesta a estas nuevas interrogantes.

En el desarrollo y filosofía de la Física, dos hechos importantes han sucedido en el siglo pasado, el advenimiento de la Teoría de la Relatividad (A. Einstein) y la Mecánica Cuántica (Planck, Dirac, Schrödingen, Heisenberg) acompañados de dos grandes inquietudes, la búsqueda de invariantes y la unificación de los campos básicos: gravitacional, electromagnético, fuerte y débil, que son las 4 acciones que se manifiestan en la naturaleza.

Pero, como dice Alain Boutot, la Física no podía ser una ciencia clara y precisa, libre de las perpetuas y estériles disputas de las que habían sido objeto, capaz de imponer sus doctrinas y de lograr un consenso universal, mientras, no hablara en el lenguaje de la geometría. Finaliza Boutot, diciendo, que la matemática es el lenguaje propio de la naturaleza.

Curiosamente, muchos de los grandes sucesos en la física han sido producto de la identificación y contradicción entre ideas ya existentes. Por ejemplo, la incompatibilidad de las ecuaciones de Maxwell y la Invariancia Galileana, permitieron a Einstein; establecer su Relatividad Especial. De manera similar, la inconsistencia de la Relatividad Especial con la gravitación de Newton dió lugar al desarrollo de la Relatividad Generalizada. Recientemente, la reconciliación de la Relatividad Especial con la Mecánica Cuántica ha permitido el desarrollo de la Teoría de Campos Cuánticos. En esta época, estamos frente a un nuevo dilema o crisis de la misma naturaleza: como conciliar la Gravitación Universal (Relatividad Generalizada) y la Mecánica Cuántica, dos fenómenos por ahora bastante disímiles, en el sentido de que la Gravitación Universal actúa a grandes distancias (relativas por ahora) y con pequeñas energías, y la Mecánica Cuántica que actúa a pequeñas distancias y grandes energías. Sin embrago, las Teorías Gauge han geometrizado las 4 interacciones básicas de la naturaleza y por tanto, han provisto la conjetura (casi válida) de que todas las fuerzas de la naturaleza tienen un origen geométrico.

Las Teorías Gauge consideradas actualmente como el corazón de la Física Teórica Moderna, tratan conjuntamente con la Teoría de Cuerdas (después de todo, una teoría gauge) y sus consecuencias como son los agujeros negros, las supersimetrías, supergravedad, y, con el sostén matemático de la Geometría No-Conmutativa, establecer tal reto de la unificación de campos.

Desde que la teoría de cuerdas es una teoría cuántica relativistas que incluye gravedad, ella debe considerar las constantes fundamentales, límites en la naturaleza: c la velocidad de la luz, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ la constante de Planck y G la constante de la gravitación universal. Con éstas, se pueden formar una longitud conocida como la longitud de Planck l_p y <u>la masa de Planck</u> m_p, dos límites más de la naturaleza. Con estos dos datos, podemos construir una teoría de cuerdas.

En estas teorías físicas, los llamados Principios de Equivalencia (o Principios de Dualidad) juegan un rol de primera en el desarrollo de éstas nuevas teorías, que tratan de explicar el comportamiento del universo. Estos principios aparecen frente a la imposibilidad de dar una explicación experimental razonable de muchos fenómenos físicos. Pero, como hemos manifestado, siempre se han aprendido actitudes y modos de pensar. Mencionaremos entre otros la dualidad onda-partícula (Planck-Einstein) donde se observa que la luz puede ser considerada (no simultáneamente) como una onda o como una partícula. En los cálculos efectuados por Einstein en su teoría de la Relatividad Especial, llega a una de las más famosas ecuaciones de la física: $E=mc^2$, y como c es una constante, esto implica que $E \approx m$. De manera análoga, en la Mecánica Newtoniana existía una contradicción entre masa inercial y masa gravitacional, Einstein, de manera intrépida y genial explica como la gravedad podía ser eliminada (el ejemplo clásico del ascensor) llegando a otro principio de equivalencia: la gravitación y aceleración son equivalentes. Este principio que tiene varias acepciones, <u>localmente</u> todos los sistemas referenciales son equivalentes (coordenadas geodésicas). También, la fuerza en la concepción de Newton, se convierte en una propiedad intrínseca del comportamiento del espacio sub-yacente, esto es fuerza≈ curvatura del espacio, siempre y cuando la fuerza sea producida por la presencia de materia. Como la curvatura es función de la métrica intrínseca del espacio en referencia, podemos postular que el campo gravitacional es identificado con la métrica g_{ij} (de signatura +, -, -, -) definida sobre el espacio-tiempo. En otras palabras, el campo gravitatorio no es sino un cambio en la métrica del espacio-tiempo.

En este sentido, Feynman establece otro principio de equivalencia: campo≈partícula (por ejemplo, el campo electromagnético se manifiesta por la presencia del fotón, una partícula sin masa) que con los principios anteriores, nos aproximan a una buena interpretación de la estructura de la naturaleza. Como otro ejemplo, tenemos el Modelo Stándar (Weinberg - Salam - Glashow, premios Nobel de física) que describe con detalles las interacciones de los campos electromagnéticos, débil y fuerte en la teoría de las partículas elementales en el contexto de la unificación de campos.

En las Teorías Gauge o de Compensación, los métodos de Lagrange-Hamilton para los Sistemas Mecánicos con una cantidad infinita de grados de libertad, que permiten obtener las ecuaciones de campo en general, partiendo de un principio estacionario (o variacional) con el método de los grupos contínuos; nos conducen al famoso teorema de Emy Noether. Este teorema nos permite deducir la existencia para determinadas condiciones, de integrales del movimiento (invariantes dinámicos) para un sistema de campos. En otras palabras, el procedimiento, nos da una manera de construír un juego completo de semejantes integrales para cualquier sistema de campo con una función prefijada de Lagrange, invariante de forma (y por lo tanto también de la correspondiente acción) respecto a cierto grupo de transformaciones continuas y diferenciables (grupo de Lie). A este nivel, para una mejor comprensión de una Teoría Gauge adelantamos que esta teoría puede ser considerada como una estrategia de la física teórica moderna, en el siguiente sentido:

a) Para una Lagrangeana L, es posible construir una teoría de campo cuántico usando las integrales de R. Feynman.
b) Simetrías globales de L, permiten determinar leyes de conservación, tales como la energía y la carga eléctrica.
c) Simetrías locales de L, nos provee de partículas elementales adicionales, las cuales son responsables de las diferentes interacciones. Como ya se mencionó, el fotón es el responsable de las interacciones entre electrones y positrones en la electrodinámica cuántica.

Cuando, dentro de esta estrategia no está determinada específicamente la Lagrangeana o la Hamiltoniana, invertimos el razonamiento, es decir, suponer que tenemos una teoría invariante.

Si bien, en este artículo nos referimos a una Teoría Gauge Clásica, añadiremos solamente un esquema de estas teorías ampliadas. Los conceptos más importantes de la naturaleza geométrica subyacentes a nuestras teorías son, el concepto de Conexión, que conduce al concepto de Derivada Covariante y por lo tanto al de Curvatura de un espacio (una variedad) o más conocida como curvatura de una conexión, las cuales se hacen visibles sobre una de las estructuras geométricas más hermosas: los haces fibrados, y que actualmente dominan la Geometría y la Topología de los espacios. Recordemos, que la curvatura K de una superficie depende solamente de los coeficientes de la primera forma fundamental de una superficie y de sus primeras y segundas derivadas parciales (Teorema Egregium de Gauss). En 1854, Riemann extiende la teoría de superficies de Gauss hacia el concepto de variedades, incorporando un campo tensorial $g_{ij}(x)$ dos veces covariantes, simétrico y definido positivo. Sobre esta variedad riemaniana; la curvatura gaussiana, se reemplaza con el Tensor Curvatura de Riemann, el cual también, se define como un concepto independiente del espacio circundante.

En física, la teoría de la relatividad generalizada es la teoría más conocida donde se encuentran las nociones de conexión y curvatura. Sin embargo, estas nociones también se encuentran en la teoría electromagnética, que se puede considerar, conjuntamente con la gravitación, conforme de H Weyl, como las precursoras de las teorías gauge. Einstein, redondea la idea en el sentido que el Tensor Curvatura de Riemann del espacio-tiempo queda determinado por la presencia de masa, y la fuerza de la gravedad proveniente del hecho de que las órbitas de los planetas correspondan a geodésicas del espacio-tiempo. De esta manera, Einstein, dio una explicación geométrica de la fuerza gravitacional (sin embargo hay que recordar lo que dice Steve Weinberg, la relatividad generalizada no es todo Geometría Riemaniana). De esta manera, Einstein, quiso una teoría unificada de todas las interacciones físicas usando el concepto de geometrización. Hoy día, se sabe que este programa se está realizando dentro del contexto de las teorías de gauge.

La idea extendida es que la conexión sobre haces fibrados principales induzcan una curvatura, la cual cause las 4 interacciones fundamentales. Tal teoría, debe incluir el macro y micro-cosmos (partículas elementales). De aquí, que sea tan importante caracterizar de alguna manera la curvatura de los espacios curvados. Dentro del marco de los espacios fibrados y desde un punto de vista físico-matemático, la estrategia es la de determinar una 1-forma de conexión ω, que cumpla con la definición de traslación paralela y diferenciación covariante designada con ∇. La 2-forma diferencial Ω, la cual describe la curvatura es dada por $\Omega=\nabla\omega$. La ecuación anterior es la ecuación básica de una Teoría Gauge sobre fibrados. Además, esta fórmula es equivalente a la conocida en física elemental $F = -\nabla\varphi$, donde φ es llamada función potencial, y en analogía ω representa potenciales. Queremos indicar, que si bien la teoría de cuerdas se ha popularizado para explicar la unificación de las 4 interacciones, existen actualmente otras alternativas a la referida teoría, basadas en hipótesis de modificación de los corchetes de Lie y la identidad de Jacobi.

II. EL PRINCIPIO GAUGE

En matemática se analizan los llamados grupos de transformaciones (pseudo-grupos de Lie). Los parámetros de éstos pueden o no dependen de las coordenadas (inclusive del tiempo). Si no dependen de las coordenadas las transformaciones se denominan globales. Por otro lado, si dependen de las coordenadas, se denominan locales. Ahora bien, una de las ideas de la física es la de considerar sistemas que sean invariantes de forma, es decir, de aquellos sistemas cuyas propiedades no cambien por transformación de coordenadas o cambios de sistemas referenciales, lo cual implica que las leyes que rigen estos sistemas sean universales. Pero la invariancia depende del grupo de transformaciones, por lo que estamos frente a dos tipos de invariancia: global y local. El principio que se indica a continuación alivia la solución.

Principio Gauge o de Calibración: "Si un sistema físico es invariante por un grupo de transformaciones globales, también debe ser invariante por un grupo local de transformaciones". Es un principio impositivo, está relacionado con el principio de Hamilton, y se refiere a la invariancia de forma de las funciones Lagrangeanas que diseñan el sistema con características muy especiales.

Las transformaciones más importantes, que tienen significado en Mecánica Cuántica, son aquellas simetrías internas entre las partículas elementales, simetrías que nada tienen que ver con el cambio de coordenadas, y que solamente actúan sobre los campos (esto se debe al principio de incertidumbre de Heisenberg, en el sentido de que en Mecánica Cuántica no existen trayectorias clásicas). En Geometría, estos grupos de transformaciones se conocen como Grupos Gauge Propio o Automorfismos Verticales, estudiados por Atiyah. Dentro de este contexto se presenta un problema básico: puede suceder que una Lagrangeana clásica de la forma $L_0(\psi, \partial\psi)$ que describe un sistema de campo ψ, sea invariante por una transformación global, pero no lo sea por una local. Pero si aceptamos el Principio Gauge como válido, entonces, estamos obligados, de alguna manera, a hacer que esto se cumpla, y esto se cumple si se hace la llamada sustitución mínima, que consiste en sustituir en la Lagrangeana $L_0(\psi, \partial\psi)$, la derivada parcial clásica $\partial\psi$ por la llamada derivada covariante extendida ∇, y de esta manera, se puede comprobar que la lagrangeana es restituida a ser invariante de forma. $\nabla\psi$ es de la forma $\nabla\psi = \partial\psi + A\psi$, y es invariante de forma por las transformaciones en referencia. A es llamado Campo Gauge o de Calibración y se puede representar mediante matrices, denominadas matrices de conexión.

Aquí, sucede algo interesante, estas matrices representativas de campos, constituyen el Algebra de Lie, del prupo de transformaciones; cuyos generadores son matrices (campos) de la forma γ_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, r$, donde r es el número de parámetros del grupo de transformaciones. Por lo tanto, podemos escribir el campo-matriz en la forma $A = W^\alpha(x)\gamma_\alpha$, donde las funciones $W^\alpha(x)$ son denominadas funciones potenciales (o potenciales de Yang-Mills). Estos generadores cumplen con relaciones de conmutación para los corchetes de Lie y la identidad de Jacobi. Un resultado importante es que el campo A no se transforma como un tensor, sino que posee una ley de transformación muy especial: $A' = gAg^{-1} - (\partial g)g^{-1}$, donde g es un elemento del grupo G de transformaciones (recordemos que una conexión es una relación de equivalencia). La transformación $A \rightarrow A'$ se denomina transformación de calibración. La sustitución $\partial \psi \rightarrow \nabla\psi$ para la conservación de la lagrangeana, bajo la acción del grupo de transformaciones, da lugar a nuevos campos $\{W^{\alpha}(x)\}$ que acoplados a los de estado original $\{\psi^{i}(x)\}$ implican la escritura: $\nabla\psi = \partial \psi + W^{\alpha}(x)\gamma_{\alpha}\psi$. De aquí, se infiere que se necesitan ecuaciones de campo adicionales para la determinación de los potenciales de Yang-Mills. Si escribimos la derivada extendida en la forma $\nabla = \partial + \varepsilon A$, entonces, ε es llamada la constante de interacción del campo complejo ψ con el real A; por lo tanto, debemos reemplazar la lagrangeana original L_0 (ψ, ∇ψ) modificada, por la nueva lagrangeana: $L = L_0(\psi, \nabla\psi) + S_1L_1(W^{\alpha}, \partial W^{\alpha})$ donde L_1 depende de los campo potenciales y sus derivadas corrientes, con la condición de que L_1 sea invariante por las transformaciones de calibración (S_1 es la constante de acoplamiento). En estas condiciones, la variación de la acción funcional con respecto a W^{α} da lugar a las nuevas ecuaciones de campo para la determinación de las funciones $\{W^{\alpha}\}$. La variación de la funcional con respecto a ψ da lugar a las ecuaciones de campo para ψ que son acopladas a la de los campos W^{α}.

Tenemos, entonces el siguiente problema: la determinación o la construcción de la lagrangeana L_1. Una teoría gauge como habíamos mencionado queda caracterizada por las operaciones de conmutación. Se prueba por cálculo directo que para dos conexiones ∇_u y ∇_v:

$$[\nabla_u, \nabla_v]\psi = (\nabla_u\nabla_v - \nabla_v\nabla_u)\psi = \left(\frac{\partial A_v}{\partial x^u} - \frac{\partial A_u}{\partial x^v} + [A_u, A_v]\right)\psi$$

Si designamos lo establecido en el último paréntesis con F_{uv} al que llamaremos operador curvatura (una generalización de éstas, son el tensor curvatura $B^{i}_{j,k}$).

$$F_{uv} = \frac{\partial A_v}{\partial x^u} - \frac{\partial A_u}{\partial x^v} + [A_u, A_v]$$

Se puede probar, también que: $F_{uv} \rightarrow gF_{uv}g^{-1}$ por las transformaciones de calibración. Podemos entonces definir:

$$L_1 = \frac{1}{2} C_{\alpha\beta} F^{\alpha}_{ab} g^{ac} g^{bd} F^{\beta}_{cd}$$

donde $C_{\alpha\beta}$ son las constantes de estructura, F_{uv} es el operador curvatura (un tensor antisimétrico) y g^{ac} y g^{bd} son las matrices inversas de la métrica respectiva.

Finalmente, que pasa con la obtención de invariantes y las fuerzas de interacción, un tema muy ligado con nuestras Teorías Gauge de acuerdo al tipo de transformaciones que se usen (globales y locales). La respuesta la tiene el famoso teorema de Noether (el corazón del Cálculo de Variaciones).

En esta propuesta, damos una lagrangeana de la forma:

$$L(x_1, \ldots, x_n; u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$$

donde: $u_{x_i} = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las coordenadas de posición y u es un campo vectorial. Tenemos que la función lagrangeana L deberá ser invariante por el grupo de Transformaciones Gauge, y por tanto también la acción respectiva, esto es:

$$S = \int \ldots \int_R L(x; U, U_x)\, d_{x_1} \ldots d_{x_n}$$

teniendo en cuenta, que el grupo de transformaciones es el par $x \rightarrow x'$ y $U \rightarrow U'$, es decir, una transformación para las coordenadas y otra para las funciones de campo, que nos proveen de dos álgebras de Lie respectivas con sus generadores en representación matricial. Entonces, lo que nos dice el teorema de Noether, es que si L es invariante de forma por las transformaciones en referencia se tiene: $\dfrac{\partial}{\partial x^{v}} J^{v}_{i} = 0$ con i = 1, 2, 3, … donde:

$$J^{v}_{i} = -L(X_i)^{u}_{v} x^{u} + \frac{\partial L}{\partial_u A_v}\left[U^{A}_{\lambda}(X_i)^{\lambda}_{u} x^{u} - (X_i)^{A}_{B} U^{B}\right]$$

y $(X_i)^{v}_{u}$ y $(X_i)^{A}_{B}$ son los generadores del grupo de transformaciones $x \rightarrow x'$ y $U \rightarrow U'$ respectivamente.

Lo descrito anteriormente constituye en verdad un modelo físico matemático de una Teoría Gauge Clásica.

Por ejemplo, si diseñamos un sistema físico mediante la lagrangeana

$$L = \bar{h} g^{\alpha\beta} \frac{\partial\varphi}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x^{\beta}} - m^2 c^2 \varphi\bar{\varphi}$$

donde $\bar{\varphi}$ significa la conjugada compleja de φ, juntamente con las transformaciones

$$\varphi'(x) = e^{i\alpha}\varphi(x) \;\; ; \;\; \overline{\varphi}'(x) = e^{-i\alpha}\varphi(x)$$

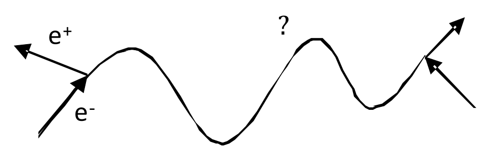
con parámetro α, y si este no depende de las coordenadas o del tiempo, entonces estas transformaciones son del tipo global, y dejan invariante de forma a L, y según la estrategia de la física moderna, enunciada anteriormente, obtenemos una ley de conservación. Observamos también, que el álgebra de Lie de éstas transformaciones globales poseen un solo generador, y por lo tanto su álgebra de Lie es un álgebra conmutativa. Aplicando el Teorema de Noether, se prueba que la ley de invariancia corresponde a la invariancia de la carga eléctrica, un resultado crucial en física.

Si por el contrario se consideran las rotaciones $e^{i\alpha(t)}$ que hoy resulta una transformación local, entonces, nuevamente el álgebra de Lie posee un solo generador. Esta transformación es isomorfa al grupo de rotaciones en el plano x-y, y dejan invariante cierta lagrangeana construida de acuerdo al Modelo Gauge, que corresponde a la Teoría Electromagnética de Maxwell. A este nivel podemos establecer que la Teoría Electromagnética es una Teoría Abeliana (un sólo generador, y por lo tanto su álgebra de Lie es conmutativa). Si consideramos entonces, la aparición de un solo campo de calibración (recordemos que en la derivada extendida, el campo A es un elemento del álgebra de Lie del grupo de transformaciones locales). De acuerdo con el principio de equivalencia de Feynman, tendremos una partícula adicional: el fotón, una partícula sin masa. Este fotón es el responsable de la interacción electromagnética. Entonces, podemos postular que el número de partículas adicionales es igual al número de generadores que posee el grupo de transformaciones locales que dejan invariante de forma la lagrangeana que diseña el sistema mecánico. En consecuencia los grupos locales de transformaciones son simetrías diseñadoras de interacciones sub-nucleares, y también, dan razón del origen geométrico de algunas fuerzas de la naturaleza.

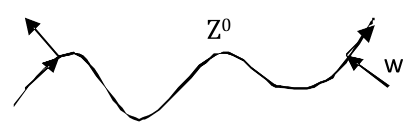
Para los grupos de rotaciones en el espacio de tipo local, obtenemos tres generadores para su álgebra de Lie, y por la postulación anterior debemos tener 3 partículas adicionales (o campos adicionales). Si el grupo de rotaciones es global, entonces, obtenemos una ley de conservación: el momento angular.

Finalmente, debemos mencionar la simetría SU(3) con 8 generadores y por lo tanto 8 partículas adicionales. También, el grupo de rotaciones de Lorentz que es una transformación global (preserva la lagrangeana que es la métrica de Minkowski, del espacio-tiempo plano) y por lo tanto, no nos provee de partículas elementales adicionales, pero si de una ley de conservación: el momento angular intrínseco de las partículas, esto es el Momento Spin (vía el teorema de Noether).

Veamos algunos comentarios sobre el modelo estándar, es decir, la relación entre los diseños geométricos dados por las Teorías Gauge con la física subnuclear. El modelo estándar dice que a escala de los fenómenos nucleares, sólo intervienen tres interacciones: La electromagnética, la débil y la fuerte que se reducen posteriormente, a la electro-débil que es la unificación de la fuerza electromagnética y la débil. Matemáticamente, indicamos la interacción electro débil con U(1)xSU(2). Ahora bien, la existencia de bosones W, Z y la predicción más importante de la Teoría de Glasgow-Salam-Weinberg, que unifica la interacción electromagnética con la electro débil. Tal como el fotón lo es para la interacción electromagnética, los bosones W, Z (W^+, W^-, Z^0) cumplen un papel de mediadores en las radiaciones entre partículas elementales. Asi una reacción del tipo electrón-positrón-muon positrón + muon negativo, puede simbolizarse por un intercambio de fotones como se indica en la gráfica (a) que sigue,



(a)



(b)

o de bosones Z^0 como en la gráfica (b). La teoría electro-débil dice que para una partícula de 100 Ge V, la posibilidad de reacción asociadas a estos dos diagramas son comparables, y de esta manera $\gamma \approx Z^0$, y por lo tanto, tenemos la unificación de la fuerza electromagnética con la débil una conjetura ya prevista en nuestra Teoría Gauge, ya que el grupo de rotaciones planas es un sub-grupo de las rotaciones tridimensionales. Siguiendo esta conjetura, para SU(3), que corresponde a los hadrones, ésta sería una simetría más alta que las anteriores, y por lo tanto tendríamos la unificación de las 3 fuerzas sub-nucleares básicas. En este sentido, se pueden construir teóricamente simetrías superiores, bajo la hipótesis de que una ley es válida en general si contiene a los casos particulares.

Ahora bien, que podemos comentar en relación con la teoría de la relatividad generalizada, y las Teorías Gauge. Veremos entonces como la R.G. es derivable del Principio Gauge (esta línea de trabajo es muy explotada en la actualidad. Así, tenemos los estudios de Carmeli con su Gravitación Gauge con grupo SL(2,⊄) y estudios sobre gravedad conforme SO(4,2)).

En las aplicaciones anteriores, hemos hecho uso de los Grupos Gauge propios o difeomorfismos verticales (matrices unitarias) las cuales cambian solamente la fase, pero ahora cambiamos referenciales en relación con la teoría de la Gravitación. En primer lugar, para ver si la relatividad generalizada es derivable del principio gauge, debemos indicar el grupo de transformaciones locales, las cuales son las traslaciones y las rotaciones, esto es, el grupo de isometrías o movimientos rígidos en el espacio-tiempo curvado (las transformaciones o grupo de Poincaré que dependen del tiempo). Recordamos nuevamente, que la estructura geométrica de un espacio queda determinado por su métrica que para referenciales curvilíneos queda determinada por el tensor simétrico g_{uv} en la conocida relación $ds^2 = g_{uv}\, dx^u dx^v$. Como esta métrica caracteriza al sistema físico (lo mismo que la lagrangeana y la curvatura) podemos usarla como lagrangeana del sistema gravitacional. Como se sabe, esta métrica es invariante de forma por las isometrías o movimientos rígidos, es decir g_{uv}, es paralelo a si mismo a lo largo de cualquier trayectoria, o sea $g_{uv;k} = 0$. Pero para que lo anterior sea válido se debe considerar no la derivada parcial corriente sino la derivada extendida, la cual es invariante de forma también por este grupo de isometrías. Habíamos indicado que la estructura subyacente está en las operaciones de conmutación y la identidad de Jacobi. Entonces, tenemos la expresión para el tensor curvatura (o forma curvatura) especificado con F_{uv}. Pero como el álgebra del grupo de Poincaré no es conmutativa, se tiene que este tensor F_{uv} antisimétrico, se reduce para el caso abeliano a $F_{uv} = \partial_u A_v - \partial_v A_u$, que es el llamado tensor electromagnético. En el caso de la teoría de la Relatividad Generalizada se acostumbra a llamar a las componentes F_{uv} como las componentes del tensor curvatura de Riemann. La partícula adicional, según la estrategia establecida se denomina gravitón, y es el responsable de la intearcción gravitatoria (para $x_i = x_i(t)$). Para completar el diseño del Modelo Gauge, debemos indicar que a excepción del fotón que es una partícula sin masa, quedaba el problema de incorporar masa a las partículas obtenidas geométricamente. Este problema fue resuelto por el físico inglés Higgs, estableciendo lo que se denomina en la actualidad el Mecanismo de Higgs para incorporar masa.

III. ESPACIO - TIEMPO CUÁNTICO

Iniciamos ahora, el intento de conciliar la Gravitación Universal y la Mecánica Cuántica. La primera teoría relativista es la Electromagnética de Maxwell, donde la luz se interpreta como una onda del campo electromagnético, con velocidad constante (igual a la velocidad de la luz) y por lo tanto independiente de cualquier referencial (observador). La velocidad de la luz es un límite de la naturaleza. En la teoría de Einstein $E = mc^2$, nos dice que un cuerpo masivo se convierte en energía pura a la velocidad de la luz. En otras palabras es necesaria una energía infinita para alcanzar un rayo de luz. En este sentido para velocidades pequeñas las fórmulas de Einstein se aproximan a las de la mecánica de Newton. Para velocidades próximas al límite se hacen evidentes las predicciones de la relatividad especial tales como la contracción longitudinal de los objetos en la dirección del movimiento etc. y por consiguiente la famosa equivalencia $E = mc^2$.

En 1908, Minkowski fusiona el espacio y el tiempo absolutos para Newton, en una sola identidad: Espacio-tiempo donde este último se comporta como otra coordenada espacial, y para diseñar la estructura geométrica de éste espacio-tiempo, formuló su métrica, la cual es invariante de forma por el grupo de transformaciones globales de Lorentz. Sin embargo, la relatividad especial con el espacio geométrico de Minkowski, sirviendo sólo como escenario, comparte en este sentido con la teoría de Newton el carácter de espacio-tiempo. Cuando este espacio-tiempo o escenario pasivo se confunde con el espacio propio, esto es el escenario se confunde con los actores, entonces tenemos la aparición de la relatividad generalizada donde se combina la c y la G (constante de la gravitación universal), y como Einstein lo describió magistralmente: El efecto gravitatorio equivale a la curvatura del espacio-tiempo de Minkowski. Lo anterior condujo entonces a proponer el siguiente postulado: la geometría es una propiedad física que ha de ser determinada experimentalmente. Fue Einstein como ya se manifestó el que realizó esta idea, con la premisa de que el espacio-tiempo adquiere curvatura en presencia de materia con distribuciones dadas de energía, de acuerdo a ecuaciones generales de la forma: Curvatura = G x densidad de energía. Lo que nos dicen las ecuaciones de Einstein es que la constante de Newton mide la rigidez del propio espacio-tiempo, es decir, su resistencia a ser curvado por la presencia de energía (o materia). Cuando la densidad de energía es pequeña, corresponde a campos gravitatorios débiles (o lentos), en comparación con la velocidad de la luz. Las ecuaciones de Einstein aproximan la ley de Newton, con pequeñas desviaciones que constituyen las pruebas clásicas de la relatividad general, como por ejemplo el corrimiento del perihelio de Mercurio o la curvatura de la luz entorno al sol. Sin embargo, las leyes de Einstein predicen, además, cualitativamente nuevos eventos, tales como las ondas gravitacionales (radiación gravitatoria), los agujeros negros, o la expansión del universo.

Las ecuaciones básicas de la teoría de la relatividad general, las cuales determinan el tensor métrico g_{ij} de la variedad de Einstein cuadridimensional son:

$$R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R = kT^{ij} \ , \ \text{con} \quad k = \frac{8\pi G}{c^4} \qquad (*)$$

y las ecuaciones de movimiento para una partícula masiva

$$\frac{D}{ds}\left(\frac{du^k}{ds}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{u} + \Gamma^k_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^i = 0 \qquad (**)$$

donde (**) son denominados ecuaciones de las geodésicas. Geométricamente hablando el problema fundamental de la teoría de la relatividad generalizada, es la de encontrar variedades de dimensión-4 endosadas con una métrica g_{is} de signatura (+, -, -, -) satisfaciendo las ecuaciones de Einstein (*) donde T^{ij} es el tensor energía-momento, R^{ij} es el tensor de Ricci y R es la curvatura escalar. La masa que aparece en el tensor energía-momento afecta a la métrica g_{ij}.

En contraste con la mecánica clásica, no existe fuerza de gravedad, pero el efecto gravitacional es causado por la métrica. En general T^{ij} depende de g_{ij}, y las partículas masivas se mueven sobre geodésicas lo mismo que los rayos de luz. Estas geodésicas son líneas afines con la condición $\frac{ds}{d\sigma} = 0$. En ausencia de materia, radiación electromagnética u otros campos, obtenemos las ecuaciones de Einstein para el tensor métrico en el vacío: $R^{ij} = 0$. Si se resuelve esta ecuación (ley de Einstein) con la métrica supuesta, casi-esférica de Schwarchild, obtenemos un test clásico: el corrimiento del perihelio de Mercurio. En este caso podemos ver la relatividad general como una Teoría Gauge, es decir, para obtener las ecuaciones (*) para el vacio, asumimos el principio variacional: $\int_H L_1 dm$ = estacionario; donde H es la región de la variedad M^4. De tal manera que para obtener ecuaciones covariantes, la integral debe ser invariante de forma, esto es L_1 debe ser un escalar. Desde que la curvatura es función directa de la métrica que caracteriza el espacio, entonces vemos que la curvatura como ya se manifestó, debe jugar un rol importante, y sirve por lo tanto para la conformación de la lagrangeana que diseña el sistema físico (ahora geométrico). Esta curvatura a la que hemos llamado <u>curvatura escalar</u> es el caso más simple que contiene el tensor, R^i_{jkm} y de esta forma asumimos que L_1 = R. por lo tanto tenemos $L = R\sqrt{|g|}$. En otras palabras, obtenemos el <u>problema de Hilbert</u>: $S_g = \int Ldu$ = estacionario, esto es, en ausencia de materia, $S_g = \int_H Rdm$; $dm = \sqrt{|g|}d^4x$, donde la integral es tomada sobre la región H de $\mathbb{R}^4$. Las ecuaciones de Euler-Lagrange del movimiento

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = 0 \qquad (***)$$

Debemos indicar, sin embargo, que de acuerdo a las ecuaciones de la forma curvatura = G x densidad de energía (o materia), podemos observar de esta forma el tensor de Ricc como ecuación de Einstein

$$R_{ij} = \frac{\partial \Gamma^\alpha_{i\alpha}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{ij}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\beta_{i\alpha}\Gamma^\alpha_{\beta j} - \Gamma^\beta_{ij}\Gamma^\alpha_{\beta j}$$

que ya fue previsto en las teorías gauge. De esta manera $R_{ij} = 0$ (recordemos que R_{ij} es la contracción del tensor curvatura $B^i_{\alpha jk}$) y por lo tanto $R_{ij} = 0$ es una fórmula netamente geométrica. En el caso de campos materiales debemos asumir que el efecto descrito por un tensor materia S^{ij}, lo podemos colocar en el segundo miembro de (***), para obtener $R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R = S^{ij}$. Para un fluído ideal T^{ij} es el candidato mas cercano, y asi escribimos $S^{ij} = KT^{ij}$, para finalmente obtener la ecuación (*).

Pero existen ciertas soluciones exóticas de las ecuaciones de Einstein (singularidades de la métrica). Recordemos la definición de velocidad de escape de un campo gravitacional, la cuál se define como la velocidad mínima para que un cuerpo pueda escapar de la influencia de la gravedad. La acción de la velocidad de escape (ahora se considera a la velocidad como un concepto) sigue siendo válida en la teoría relativista y su consecuencia más importante es que una masa M comprimida en una esfera de radio inferior a cierto valor critico $R_s = 2\frac{GM}{c^2}$, tendría una velocidad de escape superior a la velocidad de la luz. Esto significa que ni siquiera la propia luz podría escapar del campo gravitacional de esta masa, lo que justifica el nombre de agujero negro. El radio critico R_s es llamado el radio de Schwarchild, y representa una superficie de no-retorno denominada horizonte de los sucesos, ya que una vez atravesada, es imposible salir al exterior. Cuando la radiación calorífica del sol que equilibra a su gravedad disminuya, entonces, la curvatura en el entorno del sol seria tal que este se convertiría en un agujero negro. En este sentido, nos hacemos la siguiente pregunta: ¿Es la radiación calorífica un tipo de anti gravedad?

Matemáticamente, los agujeros negros no son sólo soluciones raras de las ecuaciones de Einstein, (una de ellas aparece en una singularidad de la métrica de Schwarchild) sino también, como objetos astronómicos asociados a fuentes de rayos X, o a los centros de las galaxias. También resultan cruciales en cuestiones teóricas sobre la Teoría Cuántica de la Gravitación.

Ahora bien, habíamos indicado que los agujeros negros y las supersimetrías son consecuencia de la teoría de cuerdas. Veremos entonces, como la Teoría de Cuerdas se acomoda al Modelo Gauge. El principio de supersimetría establece que entre los bosones (partículas elementales con spin entero) y los fermiones (partículas elementales con spin semi-entero) existe una completa simetría, esto es, a cada boson le corresponde un fermión y recíprocamente. Se requiere entonces, para supersimetría local; la existencia de un campo tensorial g_{ij} , el cual debe ser reconocido como métrica de la variedad espacio-tiempo. Este campo corresponde a la gravitación. En forma sugerente esto puede leerse:

supersimetría local $\rightarrow$ gravitación

En la teoría de campos cuánticos, todas las interacciones son descritas por partículas (cuantización de campos). Por ejemplo se espera que al campo gravitacional le corresponda el gravitón, un bosón de spin-2. De acuerdo al principio de supersimetría a este bosón debe corresponderle un fermión, el cuál es llamado gravitino; y es un fermión de spin semientero. A causa de la existencia de dos partículas gravitacionales, podemos entonces hablar de supergravedad.

La teoría de cuerdas como una teoría gauge

Explicamos en primer lugar, el fondo de la idea de una teoría de cuerdas. Como se mencionó al comienzo los nuevos límites de la naturaleza: la longitud y masa de Planck). La idea básica de una teoría de cuerdas es la siguiente:

reemplazar partículas por cuerdas

Explicamos este hecho, en primer lugar a nivel de la Relatividad Especial.

Usamos la notación $u = (u^1, u^2, u^3, u^4) = (\xi, \eta, \zeta, ct)$, donde ξ, η, ζ son coordenadas cartesianas, t denota el tiempo, y c la velocidad de la luz. Aún más, podemos escribir $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$, $g_{44} = 1$ y $g_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

a) **Partículas y línea universo:** En la teoría de la relatividad especial, el movimiento de una partícula libre esta descrita por una ecuación de la forma $u(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ donde $u^4(t) = ct$. Esto corresponde a una curva en el espacio de dimensión-4 (una variedad de dimensión-4) la cual es llamada línea universo. El principio variacional fundamental para el movimiento de la partícula libre es dada por

$$\int_{t_1}^{t_2} L(u_t(t))dt = \text{estacionario} \qquad (1)$$

donde $u(t)$ está fijada o determinada para $t = t_1$ y t_2, donde la lagrangeana es dada por $L(u_t) = -m_0 c\left(g_{ij}u_t^i u_t^j\right)^{1/2}$ con $u_t(t) = \frac{du}{dt}$. Aquí, m_0 es llamada masa en reposo de la partícula libre.

b) **Cuerdas y superficies universo:** Si ahora consideramos el movimiento de una cuerda, mas no el de una partícula libre, descrita por una ecuación de la forma (homotopía de la cuerda)

$u(t, a)$ con $t_1 \leq t \leq t_2$ y $a_1 \leq a \leq a_2$

donde $u^4(t, a) \equiv ct$. (Lo anterior corresponde a una superficie de dimensión-2 en la variedad cuadrimensional espacio-tiempo).

Si se fija el tiempo t_0, la forma de la cuerda es la de la cuerda tridimensional corriente. Es decir, $x(t_0, a)$, $a_1 \leq a \leq a_2$ donde $x = x(u^1, u^2, u^3)$. En lugar de (1), describiremos ahora, el movimiento de la cuerda (o la descripción física de la cuerda) $u(a, t)$ por el siguiente principio variacional

$$\int_\Omega L(u_t(a,t), u_a(a,t))\,dt\,da \;=\; \text{estacionario} \qquad (2)$$

donde u = fijo en $\partial\ \Omega$, donde Ω es una región acotada de R^2. Por ejemplo, podemos seleccionar $\Omega =]t_1, t_2[X]a_1, a_2[$, y como lagrangeana del sistema tomamos

$$L\left(u_t, u_a\right) = -T_0 c \begin{vmatrix} g_{ij}u_t^i u_t^j & g_{ij}u_t^i u_a^j \\ g_{ij}u_t^i u_a^j & g_{ij}u_a^i u_a^j \end{vmatrix}$$

con $u_t = \dfrac{du}{dt}$ y $u_a = \dfrac{du}{da}$. Aquí, T_0 es el auto llamado tensión en reposo de la cuerda, y $|\,.\,|$ denota el valor absoluto del determinante.

Dentro del Modelo Gauge el problema variacional (2) esta formulado en forma invariante, es decir, que la acción que se formule debe ser invariante de forma por un cambio de parámetros $(t, a) \to (t', a')$.

Se tiene entonces

$$L\left(u_t, u_a\right) = \left|\frac{\partial(t', a')}{\partial(t, a)}\right| L\left(u_{t'}, u_{a'}\right)$$

Las ecuaciones de Euler para el problema variacional (1) y (2) son las ecuaciones del movimiento de la partícula libre y la cuerda respectivamente. Se puede, entonces, generalizar el problema dentro del contexto de la relatividad generalizada, y podemos reemplazar el tensor métrico especial g_{ij} con otro tensor métrico de signatura (-1, -1, -1, 1).

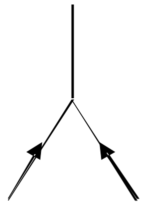
En el contexto de la física de altas dimensiones escribimos $u(u^1, u^2, u^3, u^4; u^5, u^6, \ldots, u^d)$ donde u^1, u^2, u^3, u^4 corresponde a las coordenadas espacio-tiempo, y en (2) seleccionamos g_{ij} como el tensor métrico de un espacio curvado de Riemann de dimensión-d. Los físicos agregan $(u^5, u^6, \ldots, u^d)$ como grados de libertad adicionales del espacio-tiempo. Sin embargo, estos grados de libertad son invisibles, a causa de que juegan un rol importante solamente bajo la longitud de Planck, esto es $l_P = 1.6\ 10^{-35}\,m$. El constituyente fundamental de la naturaleza no son partículas ni campos, sino cuerdas pequeñas que van vibrando cada una con un estado de vibración. En esta teoría como ya se manifestó, llamamos a una partícula como una cuerda en un estado particular de vibración, y así, una cuerda representa una gran cantidad de partículas, cada una correspondiente a un modo normal de vibración de la cuerda. Llamamos entonces, una reacción entre partículas, como la colisión de dos o más partículas cada una en un estado de vibración. Las cuerdas pueden entonces ser cerradas o abiertas, y en su colisión pueden dar lugar a nuevas cuerdas cerradas o abiertas, las cuales son independientes, cada una con su modo normal de vibración. Se acostumbra a identificar a los bosones con cuerdas cerradas y a los fermiones con cuerdas abiertas. En este sentido se establece que: La teoría de cuerdas incorpora gravitación, es decir, no se concibe una teoría de cuerdas sin gravitación.

El gravitón, el cuánto de la radiación gravitacional, es la partícula transmitida cuando una fuerza gravitacional es afectada entre dos masas, y es justamente, este bosón el que tiene el modo normal de vibración más bajo de una cuerda cerrada fundamental. No solamente esta teoría incorpora y necesita gravitación, sino que permite una descripción de la gravitación en un nivel cuántico microscópico, lo cual está libre de inconsistencias matemáticas.

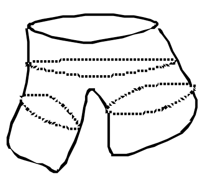
La Teoría de Cuerdas está ligada a muchas ramas de la matemática. Como dice Steve Weinberg, la Teoría de Cuerdas es la teoría de las superficies bidimensionales, traducidas específicamente como las superficies de Riemann, y los problemas dinámicos de las cuerdas se resuelven sobre estas superficies. Otra rama importante de la matemática que tiene que ver con la Teoría de Cuerdas es la teoría de grupos. Las ecuaciones que gobiernan las superficies tienen un grupo amplio de simetrías, conocidas como grupos conformes. Lo anterior conlleva a la formulación de álgebras de Lie, tales como las álgebras de Virasoro (un tipo de álgebras unitarias). De esta manera, la teoría de cuerdas une gravedad y mecánica cuántica en forma consistente. Esto se efectúa por una modificación de la relatividad a distancias muy cortas.

La consistencia cuántica de la teoría de cuerdas debe considerar ciertas restricciones sobre la posible unificación con los grupos Gauge de Yang-Mills. Como resultado, la gravedad está unida a las 4 fuerzas fundamentales, de manera única; solamente para los grupos unificadores SO(32) y E_8xE_8. Aquí SO(32) es el grupo ortogonal más grande, donde E_8 es el grupo de Lie más grande. La dimensión del espacio-tiempo para este caso es que este posea dimensión d=10, para poder obtener una teoría cuántica, consistente de la gravitación. Recordemos que una cuerda puede hacer algo más que moverse, puede oscilar de diferentes maneras, es decir; si oscila de cierta manera, vemos un electrón, pero si oscila de otra manera, entonces vemos un fotón o un quark, o cualquier otra de las partículas del modelo estándar, de manera que si la Teoría de Cuerdas es correcta ¡el mundo está hecho de cuerdas!

Las partículas en la teoría de cuerdas, como ya se dijo; provienen de excitaciones de la cuerda e incluye en las excitaciones a una partícula masa cero y spin-2 (el gravitón). La superficie universo es la llave de la física de las cuerdas. Una cuerda oscila y viaja a través de un espacio-tiempo de dimensión-10. Las oscilaciones desde el punto de vista de las superficies universo de dos dimensiones son oscilaciones, en una teoría de gravitación cuántica bidimensional. Para hacer que estas oscilaciones cuantizadas consistente con la mecánica cuántica y la relatividad especial, el número de dimensiones del espacio-tiempo está restringido a 26 solamente en el caso de una teoría con sólo fuerzas bosónicas, y a 10 dimensiones si existen ambas fuerzas y materia (bosones y fermiones). Para consideraciones más específicas de tipo geométrico, si tomamos el concepto de partícula, la interacción de ellas puede ocurrir a una distancia cero, como se observa en la figura (a), pero la teoría de la gravitación de Einstein no tiene sentido a la distancia cero. En la teoría de cuerdas, la interacción de cuerdas no ocurre en un punto como se observa en la figura (b), sino que, se unen de tal forma que se tenga un comportamiento cuántico más sensible.

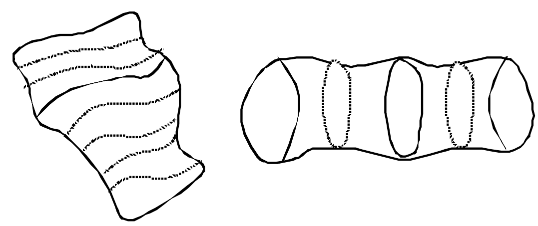


(a)



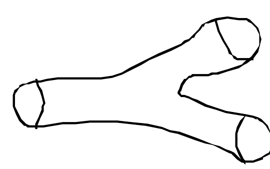
(b)

La clásica Teoría de la Geometría del espacio-tiempo, a la que llamaremos gravedad, consiste de la ecuación de Einstein, la cual relaciona la curvatura del espacio-tiempo con la distribución de materia y energía de este espacio-tiempo ¿Pero, cómo las ecuaciones de Einstein provienen de una teoría de cuerdas? Las curvas cerradas viajan en un espacio-tiempo curvado, entonces las coordenadas de la cuerda en el espacio-tiempo perciben esta curvatura cuando la cuerda se propaga, como se observa en las figuras (c). Nuevamente, la respuesta está en la superficie del universo, de tal manera, que para tener una teoría cuántica consistente en este caso, el espacio curvado en el cuál la cuerda viaja, debe ser una solución de las ecuaciones de Einstein. Naturalmente, que el espacio-tiempo queda caracterizado por su tensor métrico g_{ij}.



(c)

En este sentido, para desarrollos perturbativos, los objetos fundamentales en la teoría de cuerdas son: una cuerda de dimensión-1, la cual se mueve en el tiempo barriendo una superficie Σ de dimensión-2. Las cuerdas pueden ser abiertas o cerradas y su superficie universo inmersa en un espacio objetivo de dimensión-d, el cual puede ser identificado con el espacio-tiempo de Minkowski. Los estados en el espacio objetivo aparecen como modos propios de la cuerda, y sus amplitudes scattering son reemplazadas por las amplitudes scattering de las cuerdas. Estas amplitudes scattering son construidas de un vértice fundamental, el cuál para cuerdas cerradas esta descrito en la figura que sigue:

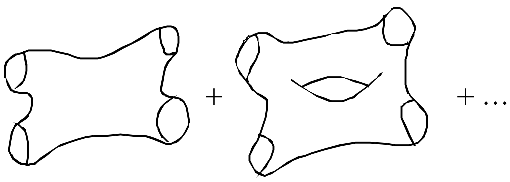


$\sim g_s$

Vértice fundamental de un cuerda cerrada

Este vértice representa la bifurcación de una cuerda o la unión de dos cuerdas, y el grado de intensidad de esta interacción es gobernada por una constante de acoplamiento g_s. Fuera del vértice fundamental se puede componer todas las posibles cuerdas cerradas con amplitud scattering $\mathcal{A}$. Por ejemplo, la amplitud de

4 puntos (4 cuerdas cerradas) que se muestran en la figura que sigue



Desarrollo perturbativo de amplitudes scattering. El orden de g_s es gobernado por el número de agujeros en la superficie universo.

El desarrollo en la topología de las superficies de Riemann (esto es, el número de huecos en la superficie) coincide con un desarrollo en serie de potencias, y la constante de acoplamiento de la cuerda es formalmente escrita como:

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} g_s^{-\chi}\, \mathcal{A}^{(n)} \qquad (*)$$

donde $\mathcal{A}^{(n)}$ es la amplitud scattering sobre una superficie de Riemann de género n y $\chi(\sum)$ es la característica de Euler de la superficie de Riemann

$$\chi(\Sigma) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma} R^{(2)} = 2 - 2n \qquad (**)$$

donde $R^{(2)}$ es la curvatura escalar de $\sum$, b es el número de fronteras de la superficie de Riemann (característica de Euler para superficies con frontera). Para la amplitud de 4 puntos del ejemplo dado se tiene b = 4.

En toda teoría de cuerdas exíste un campo escalar sin masa, llamado el dilaton, el cual acopla a $R^{(2)}$ y por esta razón; su valor esperado en el vacío determina el tamaño del acoplamiento de la cuerda. Se encuentra entonces que: $g_s = e^{(\varnothing)}$; g_s es una parámetro libre desde que $\varnothing$ está en una dirección plana (un módulo) del potencial efectivo. Así una teoría de cuerdas perturbativa está definida en la región del parámetro espacio (el cual es llamado espacio-modulo, donde $g_s < 1$ y la amplitud del nivel árbol (género-0) y es la contribución dominante con amplitudes suprimidas por potencias superiores de g_s.

Ahora bien, así como la velocidad de la luz controla la estructura del espacio-tiempo como un límite de la teoría de la relatividad, existe, como se sabe, otra constante universal $\hbar$, que es otro límite infranqueable, que rige el comportamiento de la materia a escala sub-atómica. Representa la acción mínima posible. La acción, una magnitud que (comparable con la velocidad) es dada como el producto de la energía de un cierto proceso físico por el tiempo característico en el que esta energía es liberada. Un fenómeno será clásico cuando su acción resulte mucho mayor que $\hbar(\hbar \rightarrow 0)$. La naturaleza de $\hbar$ está ligada a una característica fundamental de las partículas elementales. La idealización matemática de una partícula como un punto que sigue una trayectoria bién definida, según Heisenberg es inadecuada para partículas sub-atómicas (no existen trayectorias determinísticas en mecánica cuántica), y más bien siguiendo a Feynman, las partículas cuánticas siguen todas las trayectorias posibles simultáneamente. El movimiento, entonces, resulta un promedio entre todas las posibilidades, cada una con un cierto peso estadístico. Una medida cuantitativa del grado de Fluctuación de las trayectorias viene dada por la relación de Heisenberg es decir, el producto de las indeterminaciones en posición Δx y en impulso Δp de una partícula ha de ser mayor que la constante de Planck: $\Delta x\, \Delta p \geq \hbar/2$. Las relaciones de Heisenberg (ya que existen otras tales como $\Delta y\ \Delta p$, $\Delta E\ \Delta t$ etc.) son la expresión gráfica de la estructura matemática de la mecánica cuántica. Es conveniente tomar con atención esta característica del principio de Heisenberg o Principio de Incertidumbre. Cada vez que se tome una resolución, el principio hace que la resolución sea en verdad doble: se elige tener absoluta información sobre algo, y esta elección, es nuestro privilegio, pero al hacerse, se "elige al mismo tiempo" no tener información alguna sobre el otro algo asociado al primero, y esta segunda elección se impone al que elige, y no la hace él. Es más, resulta que siempre que se da una propiedad de un sistema cuántico se cambia su estado, y este cambio ocurre de una manera que no puede ser controlada por el observador. Los sistemas cuánticos son siempre perturbados por su medición de sus variables dinámicas.

Una de las características de la Matemática de la Mecánica Cuántica es que la posición y el impulso, no son números sino operadores (operadores cuánticos), tales como las matrices. La característica de estos objetos es que no son conmutativos cuando se les multiplica. Es decir, la limitación física impuesta por $\hbar$ está asociada a la no - conmutatividad entre posiciones y momentos, tal es así que, uno de los postulados más importantes de la Mecánica Cuántica es dada por el conmutador: $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, donde $\hat{x}$ y $\hat{p}$ son los operadores representativos de los observables posición y movimiento, respectivamente.

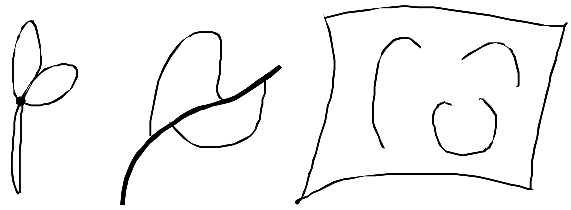
El intento de llevar las leyes de la mecánica cuántica a partículas relativistas (con velocidades próximas a c) lleva directamente a la Teoría de Campos Cuánticos. La novedad de la Teoría de Campos Cuánticos es que trata de "colectivos" de partículas, de forma que las partículas elementales individuales pueden crearse y destruirse localmente. En este contexto operacional, las relaciones de Heisenberg siguen siendo ciertas en el caso relativista de forma que Δx y Δp todavía representan la precisión en la medida de posición y de impulso, aun que esta medida no involucre necesariamente una partícula.

La identificación einsteniana entre la gravitación y la geometría tiene una consecuencia inmediata: Una teoría cuántica de la gravitación implica una estructura cuántica del espacio-tiempo. Se plantea entonces como ya se manifestó, que nuevo límite hay que implementar en la Naturaleza análogo a c y $\hbar$. Se puede entonces establecer una distancia mínima de naturaleza física. Sin embargo, no se tiene todavía una teoría precisa de la gravitación cuántica. La aplicación de las reglas de la Mecánica Cuántica a la teoría de la gravitación da lugar a inconsistencias matemáticas. Lo más sencillo es intentar formular una teoría cuántica de las ondas gravitacionales "arrugas" o vibraciones de la geometría del espacio-tiempo, similares a las ondas electromagnéticas. En este punto, se sugiere que el gravitón no sea una partícula fundamental, sino que tenga "componentes" a una escala de distancias determinada, con la intensidad intrínsica de la interacción gravitacional. Si esta idea es correcta, el gravitón revelaría sus componentes en la vecindad de la escala de Planck: $L_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$, la única cantidad con dimensiones de longitud que se puede formar con las constantes básicas G, $\hbar$ y c. Numéricamente vale unos 10^{-33} centímetros, una distancia muy pequeña. La constante de Planck es importante por otra razón más profunda: La energía necesaria para medir la estructura del espacio-tiempo con una precisión del orden de la escala de Planck, es tal que en, esa región se formaría un agujero negro microscópico con un radio de Schwarzschild del mismo orden de magnitud.

Se pueden establecer muchas consideraciones y especulaciones como las anteriores, muy sugestivas, pero imprecisas. Para ir adelante, necesitamos una teoría de gravitación cuántica, aunque sea de naturaleza aproximada: Por ejemplo, un modelo concreto de la estructura interna del gravitón a la escala de Planck.

Un nuevo paradigma: De todas las ideas propuestas hasta ahora, la teoría de cuerdas que ya hemos hecho referencia, representa el marco teórico más prometedor en este contexto. Recordemos la idea fundamental que las partículas denominadas "elementales" son en realidad objetos extensos en una dimensión; cuerdas diminutas cuya dinámica está especificada por modos normales de vibración. Cada modo normal de vibración independiente representaría un tipo de partícula del modelo estándar, que serían todas ellas manifestaciones del mismo objeto básico, la cuerda fundamental. De ser cierta, esta hipótesis unificaría todas las partículas sub-atómicas. Por ahora, repetimos lo que ya se dijo, esto conduce a una estructura matemática de riqueza insospechada, y que las cuerdas cerradas siempre tienen un modelo de vibración que se puede identificar con el gravitón en el sector cerrado, y de interacciones de tipo "gauge" (como la interacción electromagnética) en el sector abierto. Por otra parte, al ser objetos extendidos sobre un distancia del orden de la magnitud de Planck, las cuerdas interaccionan con suavidad como ya se manifestó, a distancias muy cortas. Además, de la gravitación y las interacciones del modelo estándar, la teoría de cuerdas tiene otras predicciones "genéricas" que añaden una gran complicación a su estudio. Una es la existencia de más de 4 dimensiones espacio temporales, hasta un total de 11 como máximo, y como ya se dijo las dimensiones extras serían invisibles por estar curvadas en círculos pequeños, esferas, cilindros (variedades de Calabi-Yau). Otras de las predicciones concreta de la teoría de cuerdas es la parición de nuevas simetrías en la Naturaleza. La más importante es la llamada: Supersimetría, que en cierto sentido unifica las partículas asociadas a la materia como son el electrón, los quarks y los neutrinos.

Ahora bien, los extremos de las cuerdas abiertas pueden propagarse libremente por todo el espacio, pero también, pueden estar localizadas en regiones singulares con dimensiones variables, estas regiones singulares a las cuales las cuerdas abiertas estarían enganchadas se conocen como D-branas. Literalmente son como impurezas o defectos estructurales del espacio-tiempo cuyas propiedades dinámicas están caracterizadas por el estado de vibración de su cabellera de cuerdas abiertas. Las D-branas pueden ser objetos puntuales, entonces se denominan D-partículas, o tienen una dimensión extendida (D-cuerdas), dos dimensiones extendidas (D-membranas) etc. Si las cuerdas cerradas representan fluctuaciones del espacio-tiempo, se puede decir que las cuerdas abiertas representan las fluctuaciones de las D - branas. Damos algunos ejemplos de D-branas en las figuras que siguen



(a) (b) (c)

Se tienen branas de dimensiones 0, 1, 2. Como se observa las D - branas son objetos singulares en el espacio, en las cuales está, confinados los extremos de las cuerdas. Todas las propiedades físicas de las D - branas se definen en términos del estado de vibración de sus cuerdas abiertas como se nota en la figura (c).

De esta manera, el espectro de objetos elementales en la teoría de cuerdas contiene no sólo las cuerdas mismas (cuyas vibraciones, más ligeras darían las partículas del modelo stándar) sino también, las impurezas en la estructura del espacio-tiempo denominadas D - branas. Por último, cuando las cuerdas o las D - branas alcanzan un alto grado de excitación sobre su estado de energía mínima se convierten en agujeros negros. La transición entre D-branas y agujeros negros se entiende bién a nivel cuántico.

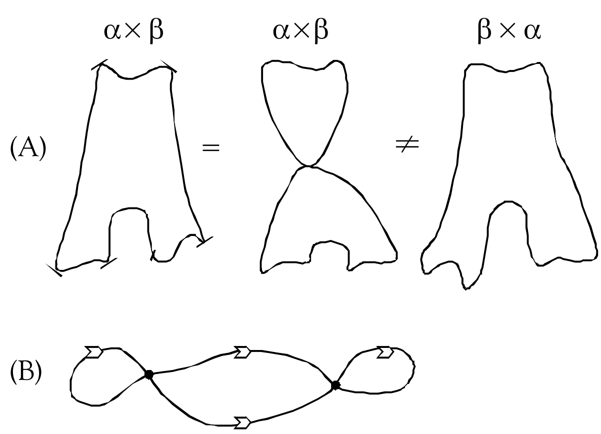
La escala de masas de las partículas del modelo estándar se extiende en torno a la masa del bosón W, unas 80 veces la del protón; el espectro va desde las partículas sin masa como el fotón (γ) y el gravitón (G), hasta el guar k top, unas 170 veces más pesado que el protón. Todas las partículas aparecerían como los modos más bajos de vibración de la cuerda (recordemos que el de más bajo modo de vibración es el gravitón por razones obvias). A una escala intermedia M_g, encontramos los modos de vibración superiores de las cuerdas y más arriba las D-branas. Por último, por encima de la masa de Planck, $M_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$, las excitaciones típicas generan agujeros negros.

Según lo anterior, tenemos una ligera pero global vista de que el modelo estándar y los agujeros negros cuánticos son dos límites extremos de una estructura microscópica más rica. Incorpora además, los ingredientes necesarios para la construcción de una teoría cuántica del espacio tiempo con una distancia física mínima del orden de la longitud de Planck (la cuerda ordinaria tiene entonces una longitud mayor que la longitud de Planck).

Uno de los principios básicos de la Mecánica Cuántica es una operación no-conmutativa entre la posición y el momento (velocidad), lo cuál conlleva, ahora a pensar en un formalismo fundamental a partir de las cuerdas y branas, en la cuál la distancia mínima de Planck estuviera incorporada de manera intrínsica. En otras palabras, buscamos un principio de no-conmutación puramente espacio-temporal (un tipo de "geometría cuántica"). Un ejemplo del tipo de estructura matemática necesaria fue descubierto por el gran matemático francés Alain Connes. Connes inventó una Geometría Cuántica, en la cual, las coordenadas espaciales son matrices que no-conmutan, en analogía exacta con las posiciones y momento de un electrón, entonces, se puede seguir una analogía con las relaciones de Heisenberg, para obtener un conjunto de relaciones entre las coordenadas espaciales. Por ejemplo, para un plano no conmutativo con coordenadas X e Y se verifica que las precisiones respectivas en la medida de las posiciones satisfacen $\Delta X \times \Delta Y \geq L_c^2$, donde L_c^2 representa el área mínima físicamente realizable. El principal problema en la aplicación literal de estas ideas a la teoría de cuerdas (cuerdas de energía) es la dificultas de obtener efectos gravitacionales en el formalismo de Connes. Es decir, no parece haber una relación natural entre L_c y la longitud de Planck l_p. sin embargo, las cuerdas abiertas poseen propiedades matemáticas que recuerdan la Geometría de Connes. Con el advenimiento de las D-branas, Witten enfatizó este hecho de manera más explícita. La posición de una D-brana en el espacio, como el resto de sus propiedades físicas, dependen del estado de vibración de las cuerdas abiertas atrapadas en ella. Si tenemos dos D-branas, tales como A y B, colocadas a una cierta distancia, sus posiciones dependerán de las cuerdas abiertas enganchadas en cada una de ellas, pero también, de las cuerdas abiertas que tienen un extremo en A y el otro extremo en B. En otras palabras, la posición de una D-brana no se puede definir individualmente, sino que se requiere el conocimiento del estado de cualquier D-branas que exista en sus inmediaciones. Matemáticamente, se puede demostrar que estas propiedades convierten la posición de una D-brana en una matriz del mismo tipo que las inventadas por Heisenberg en su creación de la mecánica cuántica (álgebras de Heisenberg). En 1996, se propuso entonces que las D-branas son los objetos más fundamentales. Más exactamente, presentaron la hipótesis de que el espacio-tiempo mismo está constituido no por cuerdas, sino como un espacio colectivo de un número infinito de D-branas. El espacio-tiempo adquiere así, una naturaleza "granular" a la escala de Planck (espuma cuántica) una especie de retículo de D-branas trenzadas mediante las cuerdas abiertas. Las D-branas pasan de ser defectos estructurales en el espacio-tiempo continuo a constituir los propios ladrillos básicos del espacio-tiempo. En la práctica, esto equivale a derivar todos los objetos de la teoría de cuerdas, incluyendo las cuerdas cerradas y los agujeros negros a partir de las variables matriciales de las cuerdas abiertas. El estudio intensivo de las matrices, de las así llamadas "teoría de matrices BFSS" confirmó en parte estas expectativas para el caso del espacio-tiempo más simétrico: el espacio de Minkowsky en once dimensiones.

La no-conmutación de las cuerdas

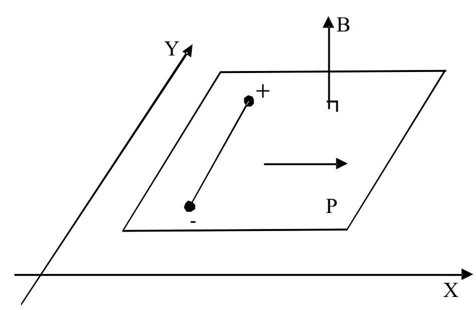
Los estados de cuerdas abiertas son de forma natural, no conmutativos.



En la figura (A) consideramos el producto de dos cuerdas abiertas α y β para producir una cuerda con estado $\alpha \times \beta$. Este mismo proceso se puede hacer intercambiando el orden de α y β a costa de retorcer la superficie generada por el corrimiento de la cuerda compuesta. Claramente, la superficie resultante difiere del producto de β y α para dar $\beta \times \alpha$. En (B), dos D-partículas A y B con 4 tipos de cuerdas abiertas AA, AB, BA, BB. La posición de las D-branas en cada dirección del espacio depende de 4 números que caracterizan el estado de las 4 clases de cuerdas abiertas. Estos cuatro números forman una matriz, el objeto matemático es esencialmente no-conmutativo. La matriz se vuelve conmutativa cuando las cuerdas AB y BA se anulan. En este caso las posiciones de A y B se pueden definir como independientes entre sí, sin interferencia cuántica.

La Geometría no-conmutativa de Connes mediante un modelo intuitivo

Este modelo aparece de hecho en su derivación a partir de las D-branas. Consideremos una cuerda abierta rígida que se comporta como un dipolo eléctrico, con cargas opuestas en los extremos, y que se propaga como se indica en la figura que sigue.



Esta cuerda rígida está inmersa en un campo magnético de magnitud $B = \frac{\hbar^2 c}{2L_c^2}$. Si el dipolo se mueve con un impulso P en la dirección X, la fuerza magnética tiende a separar las cargas, equilibrando la atracción eléctrica. La longitud de equilibrio es $Y = \frac{2L_c^2 P}{\hbar}$ de donde se deduce que las indeterminaciones respectivas satisfacen $\Delta Y = \frac{2L_c^2 \Delta P}{\hbar}$. Combinando esta relación con la desigualdad de Heisenberg $\Delta X \, \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}$ obtenemos la desigualdad de Connes:

$$\Delta X \, \Delta Y \geq \theta = 2L_c^2$$

por tanto, la geometría, medida con experimentos que involucran solo cuerdas abiertas rígidas es el Plano no-conmutativo de Connes. Para obtenerlo en la Teoría

BFSS, basta encontrar una solución en la que las cuerdas abiertas sean efectivamente rígidas.

En la que sigue, estableceremos complementaciones de la geometría no-conmutativa y su relación con la física cuántica.

La geometría no-conmutativa se apoya en los siguientes hechos esenciales:

1. Los espacios usados por los físicos son por lo general no-conmutativos.
   a) En Mecánica Cuántica, donde Heisenberg reemplaza el álgebra de funciones sobre el espacio de fase de la Mecánica Clásica, por un álgebra no conmutativa, lo cual se ve en la transición de la Mecánica Clásica a la Cuántica, para obtener un álgebra de Poisson.
   b) En Física del estado sólido (trabajos de Bellissard) del espacio de las configuraciones energía-impulsión de un tal sistema se vuelve no-conmutativo.
   c) En la Física de partículas elementales (para el modelo de Weinberg-Salam) se reemplaza la geometría del espacio-tiempo usual (una variedad de dimensión-4) por la geometría no conmutativa "desdoblando" el espacio tiempo. Esto requiere una explicación: Si tomamos un espacio de 4 dimensiones con coordenadas normalizadas tales que dx, dy, dz, dt formen una base ortonormal con $< dx^i, dx^i \geq 1$ y $< dx^i, dt \geq -1$, se tiene un álgebra de formas diferenciales (Algebra de Grassman) la cuál es no-conmutativa.
2. Existen muchos ejemplos de este tipo de espacios que aparecen de manera natural (espacios universo de Penrose, espacio de representaciones irreducibles de un grupo discreto, espacio de hojas foliativas, grupos cuánticos, …), para los cuales las herramientas clásicas de matemáticas no son adecuadas, y que corresponden de una manera natural a un álgebra no - conmutativa.

Bibliografía consultada

Dubrovin, B.A., Fomenko, A.t., Novikov, S.P. 1984. Modern geometry - Methods and applications: Editorial Springer Verlag.

Gerard't Hooft. 2001. Partículas elementales: en busca de las estructuras más pequeñas del universo. Grupo Editorial Planeta, S.A.

Fernandez Barbón, J. 1998. Geometría no-conmutativa y espacio-tiempo cuántico. Mundo Cientifico La Recherche.

Sokolov, A.A. 1989. Electrodinámica cuántica. Editorial Mir - Moscú.

Landau. L.D., Lifshitz, E.M. 1996. Teoría clásica de los campos. Vol 2. Editorial Reverte, España.

Zeidler, E. 1997. Functional analysis and its applications. Editorial Springer- Verlag.

Kadick, D, Edelen, G. 1983. A Gauge theory of dislocations and disclinations. Editorial Springer Verlag.