# El Modelo Gauge y sus Consecuencias

## Model Gauge and its Consequences

*Pedro González Cueva*[1]

Si la teoría del Big - Bang es completa, entonces la conjetura de Salam es verdadera: la teoría de Einsten aparece emergiendo de una parte pequeña de la Teoría Cuántica.

*Dedicado al maestro César Adolfo Alva Lescano.*

*If Big Bang theory is total, then Salam´s supossition is true: Einstein`s theory appears emerging from a tiny part of Quantum Theory.*

*Dedicated to professor Cesar Adolfo Alva Lescano*

## PRÓLOGO

Las teorías Gauge constituyen, hoy en día, el corazón de la física teórica moderna. El Principio Gauge, sobre el que se sustentan, establece un modelo o estrategia para el estudio de la física teórica, desde la misma teoría de la gravitación, pasando por el modelo estándar, hasta las supersimetrías (supergravedad) y cuerdas (supercuerdas). Estas teorías hacen su aparición a partir del histórico artículo de Yang-Mills sobre la teoría electromagnética no - abeliana en 1954. Sin embargo, hay que reconocer que el Principio Gauge tiene su origen en el Principio de Equivalencia de Einstein y en las ideas unificadoras de H. Weyl, pero, ahora, como un principio impositivo. Las teorías gauge clásicas comprueban matemáticamente la existencia de campos adicionales (partículas), estableciendo la conjetura de que toda teoría invariante posee un grupo de simetrías. De lo que se trata, en general, es dar respuestas (parciales) a la propuesta del Programa de Einstein que se refiere a generar una teoría unificada de todas las fuerzas de la naturaleza (electromagnética, fuerte, débil y gravitatoria), usando el concepto de *geometrización de la Física* y, por ende, establecer en forma explícita la conjetura de Einsten, en el sentido de que todas las fuerzas de la naturaleza tienen origen geométrico (basado en los tres conceptos fundamentales de la Geometría Diferencial Moderna: Espacios homogéneos, conexión y holonomía). Este programa hoy en día se conoce como Teorías Gauge.

Se hace notar, de alguna manera, que la estructura subyacente de una Teoría Gauge queda completamente determinada por relaciones de conmutación; y se imprime dinámica a estas teorías, definiendo una Lagrangeana o su dual. Se establece el Modelo Gauge y se le usa no solamente para diseñar las teorías gravitatoria y electromagnética, sino también como un molde para el estudio de las nuevas teorías de unificación: supersimetrías y supercuerdas.

CONTENIDO



## PARTE I

## MOTIVACIÓN: GEOMETRIZACIÓN DE LA FÍSICA

La primera gran unificación se debe a Maxwell, quien unió conceptos aparentemente no relacionados entre sí, tales como la electricidad el magnetismo y la óptica en la conocida teoría electromagnética de Maxwell. Posteriormente, se tiene la combinación de la fuerza débil con el electromagnetismo dado por Glashow, Salam y Weinberg, que dio lugar a la teoría eléctrodébil (modelo estándar). Por su parte H. Weyl, unificó la gravedad con la electricidad. Desafortunadamente, esta unificación demasiada matematizada no fue bien aceptada en razón de que la gravedad deriva de un hecho físico: la equivalencia de

1 Licenciado en Matemáticas. Profesor Principal de la UPAO

la masa inercial con la gravitatoria. Sin embargo, fue el inicio de las teorías gauge. Situémonos entonces en la época de Einstein (la época de las teorías invariantes y de las equivalencias, aunque hay que reconocer la presencia en ésto último de R, Feynmann: Campo-Partícula).

La primera equivalencia apareció en el fenómeno fotoeléctrico. Einstein zanjó el problema, estableciendo la equivalencia: onda-partícula, bajo la consideración de que la luz no es simultáneamente onda y partícula, sino que según como convenga se puede tomar como onda o como partícula, (primera cuantización).

Posteriormente, las incompatibilidades de las ecuaciones de Maxwell y de la invariancia Galileana, permitió a Einstein proponer la Relatividad Especial (una teoría pseudoeculideana), estableciendo su principio de equivalencia plana: "Dos sistemas inerciales cualesquiera que se mueven uno con respecto al otro con velocidad constante, son equivalentes" (conjuntamente con una medida de comparación universal: la constancia de la velocidad de la luz en cualquier sistema de referencia). En otras palabras, cambió la invariancia galileana con la lorentziana. Por lo tanto, cualquier ley física referida al sistema original debe conservar su *forma* cuando se refiere al sistema desplazado, esto és, que las leyes físicas deben ser covariantes (invariantes de forma). *La invariancia de forma*, está en la raíz de la teoría de la relatividad especial. Es natural que para establecer tal invariancia se necesita disponer de relaciones entre las coordenadas de los referenciales (una simetría). Estas transformaciones de coordenadas muy particulares deben incluír el tiempo como otra variable independiente, y estas transformaciones son las *transformaciones de Lorentz*, dependientes de un parámetro aditivo dado por la velocidad ***v*** de desplazamiento del sistema propio de referencia a lo largo de un eje. Si se toma como parámetro de rotación a $\Phi^{-1}$, entonces $tgh\,\Phi^{-1} = \frac{v}{c}$ .

De forma análoga, se pueden tomar otras pseudo - rotaciones. En conjunto, el grupo de "rotaciones" de Lorentz es de 6 parámetros (un grupo de Lie paramétrico). Entonces, el grupo de Lorentz preserva la métrica (pseudos-métrica) de Minkowsky y, como la métrica caracteriza a un espacio, se la puede usar como una Lagrangeana dentro del principio mecánico de Hamilton.

Dos consecuencias importantes se deducen de la relatividad especial:

Relaciona la estructura geométrica del espacio-tiempo con las leyes de conservación (Teorema de E. Noether), en el sentido de considerar al espacio-tiempo como un "espacio homogéneo" e "isótropo". La consecuencia se traduce en:

Espacio homogéneo-Traslación: Invariancia: energía - momentum.

Espacio isótropo - Rotación: Invariancia: Momentum Angular Total (simple y spin).

La segunda consecuencia, se traduce en la famosa fórmula de la equivalencia de la masa con la energía:

$$E \quad mc^2$$

El principio de Hamilton se relaciona con un principio variacional o principio de *acción mínima*, de tal manera que para una *partícula* en movimiento, no sometida a fuerza externa (partícula libre), el intervalo *ds* se postula como lagrangeana, o en general ds ( es cierta constante). De esta manera, para una partícula libre, $S \quad {}_a^b\, ds$, donde la integral es tomada a través de la línea universo. De forma específica, esta lagrangeana es dada en la forma:

$$L \qquad c\sqrt{1 \quad \frac{v^2}{c^2}} \tag{1.1}$$

En la que caracteriza a la partícula. En la mecánica clásica, cada partícula se caracteriza por su masa m. En definitiva, la lagrangeana es:

$$L \qquad mc^2\sqrt{1 \quad \frac{v^2}{c^2}} \tag{1.2}$$

con ecuación de movimiento dada por: (ecuación de Lagrange)

$$\frac{du_i}{ds} \quad 0 \tag{1.3}$$

donde $\frac{du_i}{ds} \quad \frac{d^2x_i}{ds^2}$ es una cuadriacelaración. La trayectoria se reduce a una recta en el espacio de 4 dimensiones (línea universo). El seguimiento anterior se puede considerar como una estrategia hamiltoniana (Principio de Hamilton), siendo este proceso de naturaleza *global* (la métrica de Minkoswky es invariante por las simetrías de Lorentz).

Posteriormente, se presentó otra dificultad: la inconsistencia de la relatividad especial con la gravitación de Newton, como consecuencia de la discrepancia de la masa inercial con la masa gravitatoria de las dos leyes fundamentales de Newton, lo cuál, permitió a Einstein desarrollar su *Teoría de la Relatividad Generalizada o Teoría de la Gravitación Universal*, una de las teorías más bellas de la física, hoy comparable solamente con la *Teoría de Cuerdas*.

Recordemos entonces algunas consideraciones básicas de esta teoría. Aparte del campo electromagnético, en la naturaleza existen otros campos llamados "gravitatorios" o "campos de gravedad" con la propiedad fundamental de que todos los cuerpos se mueven en ellos de la misma manera, independiente de la masa o de la carga, con tal que las condiciones iniciales sean las mismas. Por ejemplo, la caída libre de los cuerpos en el campo gravitatorio terrestre.

Las propiedades del movimiento en un sistema no inercial son las mismas que en un sistema inercial cuando existe un campo gravitatorio. De esta manera, un sistema de referencia no inercial equivale a cierto campo gravitatorio, que corresponde al Principio de Equivalencia de Einstein.

Sin embargo, los campos a los que equivalen los sistemas de referencia no-inerciales no son por completo idénticos a los campos gravitacionales *reales,* que se encuentran también en los sistemas inerciales. Los campos a los que equivalen los sistemas no-inerciales se anulan no bien se pasa a un sistema inercial. Los reales no se pueden anular cualquiera que sea el sistema de referencia.

El movimiento de una partícula en un campo gravitatorio está determinado en mecánica no relativista por una función de Lagrange que en un sistema referencial toma la forma:

$$L \quad \frac{1}{2}mv^2 \quad m \tag{1.4}$$

donde  es una función de las coordenadas y el tiempo que caracteriza al campo, y se denomina potencial gravitatorio. De acuerdo al Principio Variacional, las ecuaciones del movimiento son:

$$v \tag{1.5}$$

que no contienen la masa, ni otra constante que caracterice las propiedades de la partícula, lo que constituye la expresión matemática de la propiedad fundamental de los campos gravitatorios, esto es: movimiento independiente de la masa.

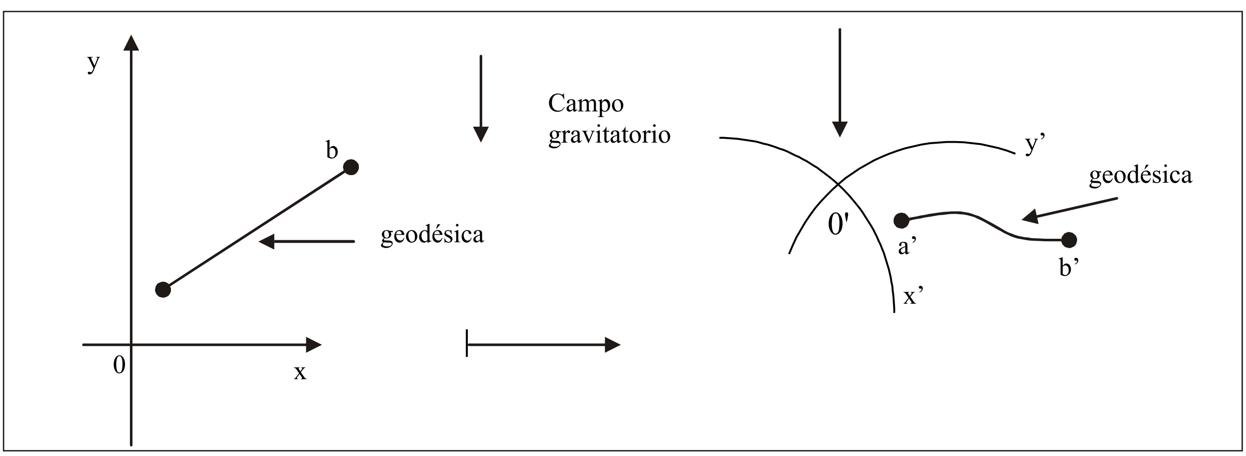
También se tiene que para un sistema no-inercial, la métrica que describe el espacio (caracteriza totalmente el espacio curvo) se da en la forma:

$$ds^2 \quad g_{ik}(x)dx^i dx^k \tag{1.6}$$

donde, $g_{ik}(x)$ determina todas las propiedades geométricas del espacio en cada sistema de coordenadas curvilíneas y constituye un tensor simétrico. (campo simétrico).

El Principio de Equivalencia de Einstein también puede traducirse en lo siguiente: *Todos los sistemas referenciales son equivalentes*, lo que implica que todas las leyes de la Física deben ser covariantes.

La gráfica que sigue es significativa:




Entonces, las leyes físicas se *deforman.* Pero como los referenciales son equivalentes, estas leyes deben ser covariantes, esto és *invariantes de forma* (por ejemplo $F \quad ma$ no es covariante, pero su equivalente conceptual si lo es, las ecuaciones de Lagrange del movimiento). En particular, la métrica inercial (por ejemplo la métrica Minkowskiana) se deforma para convertirse en (1.6).

Se ha indicado que un sistema de referencia no-inercial es equivalente a cierto campo de fuerzas. En Mecánica Relativista, estos campos quedan caracterizados por las cantidades $g_{ik}(x)$. En consecuencia: *Todo campo gravitatorio no es sino un cambio en la métrica del espacio-tiempo*.

El hecho importante de las equivalencias:

a) aceleración - gravedad,

b) Todos los referenciales son equivalentes, y

c) Todo campo gravitatorio es un cambio en la métrica indican que las propiedades geométricas del espacio-tiempo están determinadas por fenómenos físicos, y no son propiedades invariables del espacio-tiempo.

Se había comentado, que un campo gravitatorio *real* no se puede anular por una transformación de coordenadas. De un espacio-tiempo con estas características se dice que es *curvado* (o variedad curvada, en contraposición al espacio-tiempo plano o flat). Esto es, en general, no existe una transformación que reduzca un espacio curvado a uno plano, salvo que se haga en *un punto específico,* que toma el nombre de *transformación geodésica* (también llamadas *coordenadas geodésicas*). En general, una métrica (o seudométrica) en un espacio plano se establece en la forma:

$$ds^2 = dx^i\, dx^i = \delta_{ik}\, dx^i\, dx^k \tag{1.7}$$

Un cambio del sistema de coordenadas dado por

$$x^i = x^i\,(y^1, \ldots, y^n) \tag{1.8}$$

determina que el elemento métrico (1.7) se pueda escribir como:

$$ds^2 \quad \frac{x^i}{y}\frac{x^i}{y} dy \;\; dy \tag{1.9}$$

o en forma concisa:

$$ds^2 \quad g \quad dy \;\; y \tag{1.10}$$

donde los coeficientes $g \;\; (y)$ están definidos por:

$$g \quad (y) \quad \frac{x^i}{y}\frac{x^i}{y} \tag{1.11}$$

Se recuerda nuevamente, que las propiedades métricas no se alteran por la transformación (1.8), sino que (1.9) permite, sencillamente, calcular distancias en el espacio euclídeo, cuando este es curvado por un referencial Y. En (1.11) se observa que $g \;\; (y)$ son funciones conocidas y estas ecuaciones constituyen un conjunto de ½ n (n+1) ecuaciones diferenciales parciales, con solución dada por (1.8). Sin embargo, si las funciones $g$ se dan arbitrariamente (según convenga) el sistema de las $\frac{1}{2}n(n \quad 1)$ ecuaciones (1.11) (para n = 4, se tiene 10 ecuaciones diferenciales) pueden no tener solución. En el caso en que (1.11) tenga solución, el tensor métrico $g$ $= \; g$ , define una variedad euclideana; en caso contrario, se dice que la variedad (espacio) no es euclideano (o curvo). Se puede deducir un conjunto de condiciones necesarias y suficientes para la integrabilidad (1.11). Obsérvese que $g$ puede llevarse a su forma diagonal, $|g \quad| = g < 0$.

En el caso general de un campo gravitatorio variable y arbitrario, la métrica del espacio-tiempo no solamente no es euclídea, sino que además varía con el tiempo.

**Nota:** Se debe indicar que para la definición de la derivada covariante, ésta se obtiene como una variación de un campo vectorial definido en dos puntos cercanos del espacio (o variedad). El mismo resultado se obtiene en el caso que las coordenadas dependan de un parámetro, como por ejemplo el tiempo. En lo que sigue, se verá la importancia generalizadora de la derivada covariante. En efecto, el movimiento de una partícula en un campo gravitatorio se determina de acuerdo al Principio de Hamilton (Principio de acción mínima) como en el caso especial $S \quad mc \;\; ds \quad 0$, dado que el cambio gravitatorio no es sino un cambio en la métrica del espacio-tiempo; y como se verá la partícula recorre una geodésica del espacio-tiempo. Por razones pedagógicas, obsérvese, en primer lugar, que $g_{ik}$ no cambia de forma por transformación de coordenadas, y se sabe qué $g_{ik,\ell} = 0$ , siempre y cuando, en lugar de derivar $g_{ik}$, mediante una derivada parcial se hace uso de la derivación covariante, y de esta manera, $g_{ik}$ es invariante por transformaciones de desplazamiento de Levi-Civita. Ahora, en lugar de partir de un Principio Variacional (acción mínima), es más sencillo (pero relevante) determinar las ecuaciones de campo (ecuaciones de movimiento) de una partícula en un campo gravitatorio, mediante una generalización apropiada de la ecuación diferencial del movimiento libre de una partícula en la teoría de la relatividad especial dada en (1.3), ésto es: $\frac{du^i}{ds} \quad 0$ , o sea $du^i = 0$, donde $u^i \quad \frac{dx^i}{ds}$ es la cuadrivelocidad. Se tiene entonces, en el caso de coordenadas curvilíneas: $u^i \quad 0$ , donde es la derivada intrínseca. De esta manera, obtenemos:

$$du^i \quad {}^{\;i}_{kl}\, u^k\, dx^l \quad 0 \tag{1.12}$$

y la derivada covariante, considerada como un operador diferencial lineal se escribe en forma simbólica:

$$\nabla = \partial_a + \Gamma_a \tag{1.13}$$

Dividiendo la ecuación (1.12) entre ds se obtiene:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} \quad {}^{\;i}_{kl}\, \frac{ds^k}{ds}\frac{ds^l}{ds} \quad 0 \tag{1.14}$$

que también puede darse en la forma:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} \qquad {}^{\;i}_{kl}\, \frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} \tag{1.15}$$

que son, precisamente, las ecuaciones del movimiento de la partícula (ecuación de las geodésicas). Se ve, entonces, que el movimiento de una partícula en un campo gravitatorio está determinado por las magnitudes (campos)

$^{i}_{kl}$ . Aquí, se debe observar que $\frac{d^2 x^i}{ds^2}$ es la aceleración de la partícula, o sea, una cuadriaceleración. Por consiguiente, a la magnitud $m \; ^{i}_{kl} u^k u^l$ se le puede llamar la cuadrifuerza, que actúa sobre la partícula en el campo gravitatorio. El tensor $g_{ik}$ representa aquí el papel de los potenciales del campo gravitatorio y sus derivadas parciales determinan la intensidad del campo: (en el el esquema clásico: $F = \nabla\phi$).

Como ejemplo, véase lo que sucede con las ecuaciones de la Electrodinámica cuando existe un campo gravitatorio (las ecuaciones de la electrodinámica en coordenadas curvilíneas) que se pueden generalizar de manera que sean aplicables en un referencial no-inercial arbitrario. El tensor campo electromagnético en la Teoría de la Relatividad Especial está definido por

$$F_{ik} \quad \frac{A_k}{x^i} \quad \frac{A_i}{x^k} \tag{1.16}$$

Si se emplea la estrategia de la derivada covariante, (1.16), se generaliza, escribiendo:

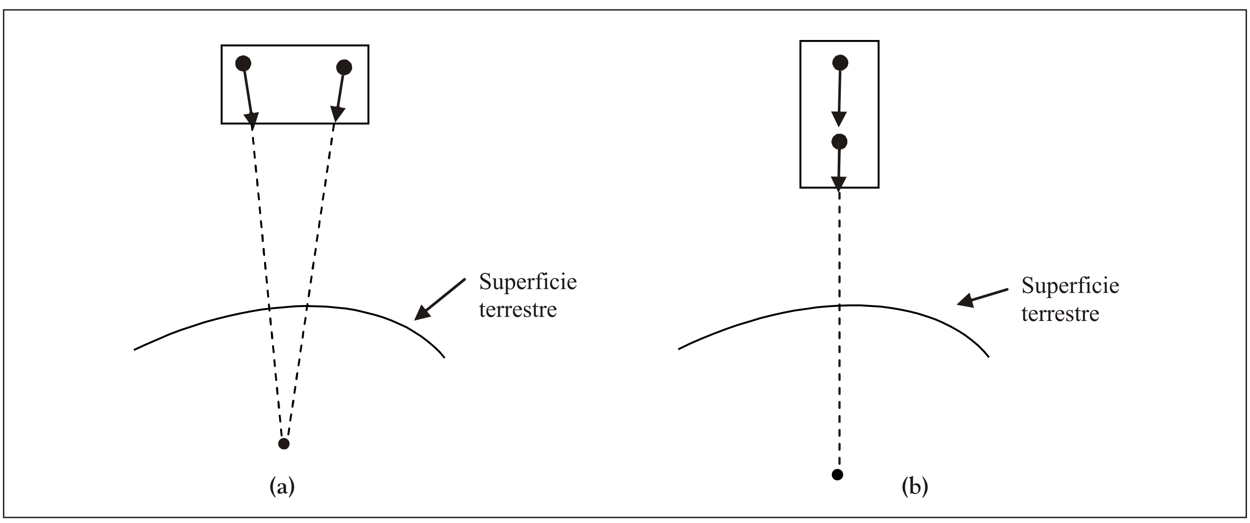
$$F_{ik} = A_{k,i} - A_{i,k} = \partial A_k / \partial x^i - \partial A_i / \partial x^k \tag{1.17}$$

y, por lo tanto, no cambia la relación $F_{ik}$. Es decir, el tensor electromagnético es independiente de la presencia del campo $\Gamma$. También se puede verificar que las ecuaciones de Maxwell:

$$\frac{F_{ik}}{x^l} \quad \frac{F_{li}}{x^k} \quad \frac{F_{kl}}{x^i} \quad 0 \tag{1.17´}$$

tampoco cambian de forma.

Dentro de esta línea de trabajo, es interesante observar la Gravitación como curvatura del espacio-tiempo. Se puede, inicialmente, considerar el campo gravitacional como *uniforme*, lo cuál, por el principio de equivalencia, significa que relativo a un observador inercial la aceleración tiene la misma magnitud y dirección. Esto es una idealización, aproximadamente cierta. Lo cierto es que la aceleración natural debido a la gravedad varía de un punto a otro. Las gráficas (a) y (b) son elocuentes.




En (a) se muestran dos partículas inicialmente en reposo relativo. Se supone que la línea de separación es horizontal. Si ambas partículas se *sueltan* de su posición inicial, no siguen direcciones paralelas (salvo en el inicio) sino que tienden a encontrarse en el centro de la Tierra; y la distancia entre ellas decrece según pasa el tiempo. De igual manera en (b), si se sueltan las dos partículas (en los dos casos, el *soltar* es simultáneo), la partícula que está más cerca de la superficie terrestre se acelera mucho más que la más alejada, por efecto de la mayor gravitación terrestre; y, por ende, la primera partícula tenderá a alejarse de la primera conforme transcurre el tiempo. En términos de trayectorias (geodésicas), en (a) se acercan, y en (b) se alejan. En la mecánica clásica estos fenómenos son conocidos como *efectos tidal*. La aceleración relativa de las partículas prueba, dadas en las gráficas anteriores, que tiene una visualización de analogía geométrica. En el caso (a), con una esfera, en el siguiente sentido: si se desea que las partículas *resbalen* por arcos de círculos máximos, desde dos puntos situados en el Ecuador, se iniciarán con movimiento paralelo, pero posteriormente las trayectorias ya no serán paralelas y se encontrarán en el polo norte. Esto se debe a que la superficie es curva. Para (b), es sobre una seudo-esfera. La geometría diferencial de las geodésicas sobre una superficie en términos de desviación geodésica está dada por la ecuación de Jacobi:

$$\frac{d^2 v}{ds^2} \quad Kv \quad 0 \qquad \frac{d^2 v}{ds^2} \qquad Kv \qquad (1.18)$$

donde $v$ es la variable de acercamiento o alejamiento y K es la curvatura de la superficie con K = K( (s)), y (1.18) es verdadera para cualquier superficie con K > 0, K = 0 y K < 0. Como K depende de s, se dice que K depende de $g_{ik}$. Se deduce, entonces, la expresión de Einstein: "La gravedad no es una fuerza, (como lo expresado por Newton) sino más bien, es una curvatura del espacio tiempo". Podría decirse que el campo producido por dos masas deforma el espacio entre ellas y la fuente de esta curvatura es la materia a si misma. Generalizando la Ley de Inercia, se dice que las partículas en un campo gravitatorio siguen *geodésicas*. El Principio de Equivalencia es un análogo físico del hecho de que una pieza pequeña de un objeto cualquiera de 2 dimensiones puede ser aproximadamente semejante a una pieza pequeña del plano euclideano (en el mejor de los casos, convexa). Se puede probar que las ecuaciones (1.14) necesariamente son invariantes de forma bajo un cambio de coordenadas. En la teoría tensorial, en general, se puede medir la desviación de un espacio general de un espacio plano (flat) mediante el tensor curvatura designado con $R_{ijk}$, de donde, por contracción tensorial se obtiene dos tensores importantes; el Tensor de Ricci, designado con $R_{ij}$ $R_{ij}$, y el tensor escalar designado con R (o curvatura escalar).

Considérese la Teoría de la Gravitación como una Teoría Invariante. Las ecuaciones básicas del campo gravitatorio, que determinan el tensor métrico $g_{ij}$ para un campo con materia son:

$$R^{ij} \quad \frac{1}{2} g^{ij} R \quad KT^{ij}; \left( \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \quad {}^{k}_{ij} \frac{dx^i}{d_s} \frac{dx^j}{d_s} = 0 \right) \qquad (1.19)$$

y para la partícula libre

$$R^{ij} \quad \frac{1}{2} g^{ij} R \quad 0 \quad ; \quad (\dot{x}_{,j} \, \dot{x}^j = 0) \quad (*) \qquad (1.19')$$

y (*) es una forma condensada de las ecuaciones de las geodésicas. Al establecer a la teoría de la gravitación como una Teoría Invariante (sólo para la partícula libre), se emplea el Principio de Hamilton, con un Principio Variacional, de la siguiente forma:

$$_H L_1 dm \quad estacionario$$

donde H es una región del espacio-tiempo y dm $= \sqrt{|g|}\, d$ es el elemento de volumen en el espacio-tiempo. De manera que para obtener ecuaciones del movimiento que sean covariantes, la integral debe ser invariante por simetría; esto es, $L_1$ debe ser un escalar. Desde que la curvatura juega un rol importante en gravitación y R es la curvatura más simple, entonces se asume que $L_1$ = R. De esta manera se obtiene el Problema Variacional de Hilbert.

$$J = S = \ _H Ld \quad estacionario; \ L \quad R\sqrt{|g|} \qquad (1.20)$$

Donde el elemento de volumen (4-volumen) es invariante desde el punto de vista relativista. La operación J = S debe ser también invariante junto con $L_1$. Se prueba entonces que:

$$J = - \ _H (R^{ij} \quad \frac{1}{2} g^{ij} R) \quad g_{ij} dm \qquad (1.21)$$

de donde se sigue (1.19), esto es:

$$R^{ij} \quad \frac{1}{2} g^{ij} R \quad 0 \qquad (1.22)$$

En el caso de los campos con materia, se asume que el efecto es descrito por un tensor material $S^{ij} \quad KT^{ij}$ (para un fluido ideal), y si se reemplaza en (1.22) obtenemos:

$$R_{ij} \quad \frac{1}{2} g_{ij} R \quad KT_{ij} \qquad (1.23)$$

donde $T_{ij} = g_{ir} g_{js} T^{rs}$. Si se aplica $g^{ij}$, a (1.23) se obtiene:

$$g^{ij} \ (R_{ij} \quad \frac{1}{2} g_{ij} R) \quad g^{ij} KT_{ij}$$

$$= R - 2 R = KT$$

y finalmente:

$$R_{ij} \quad K(T_{ij} \quad \frac{1}{2} g_{ij} T) \qquad (1.24)$$

En el caso especial de ausencia de materia, radiación electromagnética y otros campos, se tiene la ecuación para la partícula libre:

$$R_{ij} = 0 \ (R_{ij} \text{ tensor de Ricci}) \qquad (1.25)$$

Recuérdese que una condición suficiente para la igualdad de las derivadas parciales $^2 u / \ _x \ _y$ y $^2 u / \ _y \ _x$ de una función $u = u(x, y)$ es que $u(x, y)$ sea de clase $C^2$; pero resulta que esta restricción no es suficiente para asegurar la igualdad de las derivadas covariantes (no conmutatividad de la diferenciación covariante). En efecto, si se considera un campo vectorial $^i$ con componentes de su segunda derivada covariante: $^i_{,k\ell}$, se tiene:

$$^i_{,k\ell} - \ ^i_{,\ell k} = - \quad R^i_{\ k\ell} - 2 \ ^i_{,} \, T_{k\ell}$$

donde, $R^i_{\ k\ell}$ es un tensor de orden - 4, llamado el Tensor Curvatura de la Conexión (que tiene sentido geométrico). Si la conexión tiene Torsión $T_{k\ell}$ nula, entonces, la conmutación de la derivación covariante es válida si $R^{i}_{\ k\ell}= 0$ (espacio plano). Lo anterior pone en evidencia que la derivada covariante está en relación, no sólo con procesos simétricos, sino con procesos asimétricos, y como se manifestó, la curvatura de un espacio caracteriza la presencia de una fuerza. Sin embargo, se nota que el tensor curvatura está construido en base a la métrica del espacio, representada por el tensor $g_{ik}$.

Ahora bien, comúnmente no se conoce la Lagrangiana (o la Hamiltoniana) de un sistema, por lo que se procede establecer una teoría invariante, invirtiendo la analogía para obtener reglas de commutación que caracterizan a la teoría. El siguiente dato es de interés: Dos matrices U y H (donde U es una matriz unitaria y H una matriz Hamiltoniana) están relacionadas en la siguiente forma:

$$U \quad e^{iaH} \quad I \quad iaH \quad \frac{(iaH)^2}{2!} \quad ... \qquad (1.26)$$

y en primera aproximación:

$$U = I + iaH \qquad (1.26')$$

donde a es un parámetro arbitrario, es decir una relación entre una matriz unitaria y una hermitiana.

Regresemos a las teorías invariantes. En Física subnuclear, el concepto de invariancia de una teoría respecto de un grupo de transformaciones (simetrías) incluye dos aspectos: 1) Propiedades de transformación definidas de las funciones de onda $\Psi$, y 2) Propiedades de transformación definidas del hamiltoniano $\hat{H}$.

Con relación a un grupo de transformaciones G, todo el espacio de Hilbert de las funciones de onda se descompone en sub-espacios invariantes, es decir, existen familias de funciones de onda que, según una determinada ley, se transforman entre si (g elemento del grupo dado):

$$\Psi' = U(g)\Psi \qquad (1.27)$$

donde se impone la condición de grupo $g_2 g_1$ y la correspondiente representación:

$$U(g_2 g_1) = U(g_2)U(g_1) \qquad (1.28)$$

Considérese las condiciones restrictivas que se imponen, en la teoría invariante, a las propiedades de transformación del hamiltoniano. Supóngase la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo: (como un ejemplo).

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi \qquad (1.29)$$

y aplíquese a esta ecuación el operador U de la representación, según el cual se transforma la función de onda .

Admitiendo que U conmuta con el operador $\frac{}{t}$ (en el caso general no es necesario) se obtiene:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}(U\Psi) = U\hat{H}U^{-1}U\Psi$$

o bien:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = U\hat{H}U^{-1}\Psi$$

La invariancia de la teoría significa que:

$$U\hat{H}U^{\ 1} \quad \hat{H}$$

de donde:

$$\hat{H}, U \quad 0 \qquad (1.30)$$

De esa manera, exigir que la teoría sea invariante respecto de las transformaciones de un cierto grupo, conduce a la conmutatividad del hamiltoniano con todos los operadores de las representaciones del grupo (especialmente grupos gauge).

La construcción de Lagrangeanas (por ejemplo, lagrangeanas para diseñar la gravitación) es un problema interesante. En esta parte, sólo se consideran algunas conocidas para obtener ecuaciones de movimiento de las partículas que intervienen. Supóngase que $(x)$ denote un campo escalar complejo en un espacio-tiempo con métrica lorentziana: $g_{ij} = (1, -1, -1, -1)$, y considérese la siguiente acción:

$$S = \int \left[\hbar^2 < \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial x} > - m^2c^2\bar{\varphi}(x)\varphi(x)\right] dx^4 = \Lambda dx^4 \qquad (1.31)$$

Aquí, m 0 es la masa de la partícula descrita por el campo (o función de onda). Se puede probar que (1.31) es invariante bajo la transformación o simetría, dada en la forma

$$\varphi' = e^{i\alpha}\varphi \quad ; \quad \bar{\varphi}' = e^{-i\alpha}\bar{\varphi} \quad (\alpha \text{ es un parámetro}) \qquad (1.32)$$

Donde (1.32) es una transformación global (independiente de las coordenadas y del tiempo). Este es el caso de la partícula libre. Para el principio variacional:

$$\frac{\delta S}{\delta} \quad 0 \qquad ; \qquad \frac{\delta S}{\delta \bar{}} \quad 0$$

Se obtiene la ecuación del movimiento o ecuación de Klein - Gordon:

$$(\hbar^2\Box + m^2c^2)\varphi = 0 \qquad (1.33)$$

donde $\Box = \frac{2}{x^{0\,2}} \quad {}^{3}_{1} \quad \frac{2}{x^{\alpha\,2}}$ (invariante)

Si el campo escalar es real $\bar{}$ (neutral), entonces, la lagrangeana y la ecuación del movimiento son:

$$L \quad \frac{1}{2} \quad \frac{}{x}, \frac{}{x} \qquad m^2c^2 \quad ^2$$

$$(\Box + m^2c^2) \quad = 0$$

Ahora bien, al escribir las ecuaciones (supuestas)

$$a^{\eta} = c^{\eta s'} b_{s'} \quad y \quad a_{s'} = c'_{s'\eta}\, b^{\eta}$$

que describen un sistema físico, y suponiendo que estas ecuaciones son invariantes (por ejemplo, por el grupo Spinorial SL (2,$\mathbb{C}$), se obtiene otra alternativa para la obtención de otras ecuaciones invariantes importantes. Para este caso particular, se obtiene la conocida *ecuación de DIRAC* (y su conjugada):

$$(i \quad _u \quad ^u \quad m) \qquad 0 \quad ; \qquad \bar{} \quad i \quad _u \quad ^u \quad m \qquad 0$$

que son ecuaciones de spinores, invariantes en relación con el grupo de Lorentz y que gobiernan el movimiento de una partícula relativista.

Por razones de nomenclatura, se acostumbra definir la densidad de corriente y carga en la siguiente forma (donde $x_n(t)$ son posiciones de las cargas):

$$J(x,t) := \sum_n e_n \delta^3(x - x_n(t)) \frac{dx_n(t)}{dt}$$

$$(x,t): \quad \sum_n e_n \quad ^3(x \quad x_n(t))$$

se puede reunir $J$ y ε en un cuadri-vector J escribiendo :

$$J^\circ = E \qquad (*)$$

$$J \quad (x): \quad _n \quad e_n \quad ^3(x \quad x_n(t)) \frac{dx_n(t)}{dt} \qquad (**)$$

para que (**) incluya a (*) es necesario definir un "gauge", que en este caso será:

$$x_n^0(t) \quad t$$

**Unificación de Weyl (Geometría de la Gravitación).** De trascendencia, en las teorías gauge, fue el intento de H. Weyl de unificar la teoría de la relatividad general con la teoría electromagnética en 1918, pero, desafortunadamente haciendo uso exclusivo del modelo de la geometría de Riemann, desarrollando una geometría paralela, a la que denominó geometría infinitesimal, lo cual fue desestimada por Einstein haciendo uso de argumentos físicos, y como dice S. Weinberg, la Gravitación no es sólo geometría de Riemann.

La geometría diferencial se refiere clásicamente al estudio de objetos geométricos definidos sobre variedades diferenciables. Uno de los objetos más simples, pero a la vez más interesantes, es un campo de tensores covariantes de segundo orden simétricos y no singulares. La rama de la geometría diferencial que estudia las estructuras asociadas con estos objetos se denomina geometría riemaniana. Alternativamente, este objeto es dado, asociándolo con el espacio tangente en cada punto x con un producto interno $_x$ en la forma $_x(u,v) = g_{ij}(x)u_iv_j$, donde $g_{ij}$ es un tensor métrico no singular y simétrico, que caracteriza todas las propiedades geométricas internas del espacio (o variedad). Sin embargo, hay que recordar que este producto interno (métrica) es de naturaleza global**,** esto es, una vez que ha sido definido se considera el mismo en todo punto del espacio.

En esa época, H. Weyl propuso una métrica, no de naturaleza global, sino <u>local</u>, esto es, una métrica que cambie en cada punto, por efecto de la posición. De esta manera estableció lo anterior en forma matemática como:

$$g'_{uv}(x) = \lambda(x)g_{uv}(x) \qquad (1.34)$$

donde el factor conforme $\lambda(x)$ es una función diferenciable arbitraria y positiva. Así, $g'_{uv}(x)$ será una métrica conforme, y el espacio (o variedad), diseñado por esta métrica, toma el nombre de espacio (o variedad) conforme. Weyl requiere que a la invariancia de forma de la relatividad general se le sume la invariancia bajo la sustitución dada en (1.34). Weyl designa a (1.34) una transformación gauge, y por lo tanto, hace de la escala (x) una propiedad local de la métrica.

Recuérdese que en geometría riemaniana, el producto escalar de dos vectores unitarios es preservado por traslaciones, de tal manera que si un vector $v$ en un punto $P = (x_1, \ldots, x_n)$, es transportado paralelamente a otro punto $P = (x^1 + dx^1, \ldots, x^n + dx^n)$, entonces:

$$v \rightarrow v + dv \qquad \text{donde} \qquad dv = -v \qquad dx^{\nu} \qquad (1.35)$$

Esta transformación es idéntica al caso riemaniano, excepto que la conexión de Christofell ha sido reemplazado por un objeto similar llamada conexión conforme {●}, la cual también es simétrica con respecto a los índices y .

Veamos algunos resultados de Weyl sobre su conexión conforme. Para ésto, considérese dos vectores u y v en P, bajo transporte paralelo a P', estos se convierten en un u + du y v + dv . Por la propuesta de Weyl (hipótesis de Weyl) de que $g_{uv}(x)$ cambia de punto a punto, la relación entre los productos escalares en cada uno de los puntos es:

$$(g + dg)(u + du)(v + dv) = (1 + d)(g\ u\ v). \quad (1.36)$$

Así, los productos escalares en P y P' no son iguales y, más bien, son proporcionales. El factor de proporcionalidad 1 + d que es infinitesimalmente cercano a la unidad distingue la geometría de Weyl de la de Riemann. Aquí, d es una 1-forma diferencial d = $_r dx^r$. Entonces, Weyl demuestra que:

$$g_{\alpha\beta}\phi_\gamma = \partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \{\alpha\beta\gamma\} - \{\beta\alpha\gamma\} \quad (*)$$

y por un proceso de permutación de índices tenemos la conexión conforme:

$$\frac{1}{2} \qquad g \quad g$$

donde son los símbolos de Christofell, derivados de la métrica g . De esta manera en la geometría de Weyl, la conexión afín depende doblemente de: i) El tensor métrico g y ii) El covector $_r$, que relaciona las escalas entre dos puntos del espacio (o de una variedad).

Si la teoría electromagnética se puede obtener de esta teoría gravitacional, entonces, se usa la transformación (gauge): g (x) = (x)g (x), y desde que:

$$\{\alpha\beta\gamma\} = g_{\alpha\gamma}\left\{ {\lambda \atop \alpha\ \beta} \right\} = g_{\alpha\lambda}\left\{ {\lambda \atop \beta\ \gamma} \right\}$$

entonces, por sustitución, en (*) se tiene:

$$g \ ' \quad g \quad g \qquad , \ , \qquad , \ , \quad (**)$$

$$g \qquad g$$

de donde se concluye que la transformación

$$g \qquad g \qquad v \quad ' \qquad \frac{1}{}$$

y desde que es una función arbitraria diferenciable y positiva, puede tomarse como (x) = $e^{(x)}$ para alguna función (x). Ahora, el grupo de transformaciones gauge se escribe:

$$g_u(x) \rightarrow e^{(x)} g_u(x) \qquad (x) \rightarrow (x) + (x)$$

que es el resultado clásico en la teoría del potencial electromagnético.

## CONCLUSIONES

1. (Tomada de *Albert Einstein: mis ideas y opiniones*) La teoría de la relatividad constituye un excelente ejemplo del carácter fundamental del desarrollo moderno de la ciencia teórica. Las hipótesis iniciales se van haciendo cada vez más abstractas y más alejadas de la experiencia. Por otro lado, nos vamos acercando al gran objetivo de toda ciencia, que consiste en abarcar por deducción lógica el mayor número posible de hechos empíricos, a partir del menor número de hipótesis o axiomas. Entre tanto, la cadena de pensamiento que procede, desde los axiomas hacia los hechos empíricos, o hacia las consecuencias verificables, va alargándose y adquiere un carácter más sutil. En búsqueda de una teoría, el científico teórico se ve compelido a guiarse, en grado creciente, por consideraciones puramente matemáticas, formales, porque la experiencia física del experimentador no puede conducirle hasta las más elevadas regiones de la abstracción.
2. Muchos de los desarrollos fundamentales de la física provienen de la identificación o contradicción entre ideas existentes. Por ejemplo, la incompatibilidad de las ecuaciones Maxwell y la invariancia galileana permitieron a Einstein proponer la Teoría de la Relatividad Especial. De manera similar, la inconsistencia de la Relatividad Especial con la Gravitación de Newton dio lugar a la teoría de la Relatividad General. Recientemente, la reconciliación de la relatividad especial con la mecánica cuántica permitió el desarrollo de la teoría de los campos cuánticos. En el presente, estamos en la misma coyuntura, la relatividad general parece incompatible con la teoría del campo cuántico: grandes distancias y pequeñas energías, con pequeñas distancias y grandes energías. Parece que la Teoría de Cuerdas es la apropiada en la compatibilización.
3. Se adquiere gravitación cuando se pasa de lo global a lo local, mediante una transformación general de naturaleza local, que sea dependiente de las coordenadas y del tiempo. Las transformaciones (simetrías) de Lorentz son de naturaleza global, ya que preservan la forma de la métrica de Minkowsky.
4. La métrica, diseñadora geométrica de un espacio, y la derivada covariante juegan un rol de primera en estos modelos; la primera actuando como lagrangeana para el sistema dentro del contexto del Principio de Hamilton, y la segunda como un instrumento para hacer la transición de lo global a lo local, introduciendo nuevos campos (partículas). El concepto de Cur-

vatura es otro ingrediente relevante en la teoría de éstas simetrías.

5. Las simetrías globales están relacionadas con la obtención de invariantes de forma. Las simetrías locales se relacionan con leyes de movimiento covariantes y con los llamados invariantes dinámicos.
6. Las operaciones de conmutación y la identidad de Jacobi son los elementos subyacentes de las teorías Gauge.
7. La conexión es la noción fundamental de la geometría de Riemann. Si esta geometría está basada en los grupos de Lie, la reinterpretación de la geometría Riemaniana permite pasar de procedimientos globales a locales, particularmente para los grupos de transformaciones paramétricas.
8. Geométricamente hablando, el problema fundamental de la Teoría de la Relatividad General es encontrar una variedad de cuatro dimensiones, $M^4$, endosada con una métrica $g_{ab}$ de signatura (+,–,–,–) satisfaciendo la ecuación de Einstein:

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = \frac{8\Pi G}{c^4} T_{ab}$$

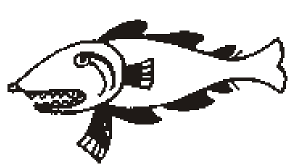
El problema desarrollado casi completamente es un caso particular de lo anterior, diseñado por las ecuaciones:

$$Rij = 0 \quad ; \quad (\dot{x}_{,j}\, \dot{x}^{j} = 0)$$

con la métrica de Schwarschild.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Callum - Quigly. April 14-2003. *On the origins of gauge theory*.
2. Dubrovin, D.A.; Fomenko, A.T.; Novikov, S.P. (1984). *Modern Gometry-Methods and Applications*. Tomo I. Springer-Verlag.
3. Einstein, Albert. (2002). *Mis ideas y opiniones*. Bon-Ton.
4. Faber, R.L. (1996). *Differential Geometry and Relativity Theory*. M Dekker.
5. Landav - Lifshitz, (1959). *Teoría Clásica de los Campos*. Editorial Reverte.
6. Levich, B. (1974). *Mecánica Cuántica*. Editorial Reverte.
7. Sokolni Koff, I.S. (1964). *Tensor Analysis Theory and Application to geometry and Mechanics of continua*. Jhon-Wiley
8. Sokolov, A.; Zhukowski, V.; Ternov, I.; Borosov, A.. (1989). *Electro-dinámica Cuántica*. Editorial Mir.
9. Weinberg, S. (1972). *Gravitación y Cosmología*. Jhon Wiley.
10. Willmore, T.J. (1964). *An introduction to Differential Geometry*. Oxford.



*Representación mochica de peces*